الجزء الأول

# الرائد في الرياضيات

## الفصل الأول
## العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

اعداد وترتيب

الأستاذ رائد علي عبد الحسين

07703153998

الصف الثالث متوسط

- شرح مفصل للمادة
- ملاحظات وخطوات حل لكل موضوع
- حلول أمثلة وتمارين الكتاب بشكل مبسط

2021

طريقك الى النجاح

# الفصل الأول

# العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

MATHEMATICS

الدرس 1 ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

الدرس 2 التطبيقات

الدرس 3 المتتابعات

الدرس 4 المتباينات المركبة

الدرس 5 متباينات القيمة المطلقة

متوسطة نهج البلاغة الأهلية

07703153998

الفصل الأول العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

## الدرس 1 ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

### خواص الجذور التربيعية

[1] إذا كانت الجذور متشابهة $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a$

$\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=6$ , $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$ , $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7$

[2] إذا كانت الجذور مختلفة $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$ , $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{35}$ , $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{18}$

[3] $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ , $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$

[4] رقم × الجذر

$2\times\sqrt{3}=2\times 1\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ , $3\times 4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

$2\sqrt{5}\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{15}$ , $4\sqrt{3}\times 5\sqrt{3}=20(3)=60$

[5] لا يمكن اجراء عملية الجمع أو الطرح على الجذور المختلفة.

$\sqrt{5}+\sqrt{2}$ , $2\sqrt{3}-3\sqrt{7}$

[6] يمكن اجراء عملية الجمع او الطرح على الحدود المتشابهة (( ننزل الجذر ونجمع او نطرح خارج الجذر فقط))

$3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=7\sqrt{5}$ , $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$

الأكبر ونطرح

[7] هنالك جذور لا يمكن تبسيطها مثل $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11}$

[8] هنالك جذور يمكن تبسيطها مثل:

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

| | |
|---|---|
| 2 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 3 |
| $2\sqrt{3}$ | 1 |

$\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

| | |
|---|---|
| 5 | 125 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| $5\sqrt{5}$ | 1 |

**ملاحظة**

[1] نقوم بتبسيط الجذور

[1] اذا كان لدينا قوسين متشابهين ومختلفين بالإشارة أي بالصورة :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$$

أو نقوم بتوزيع القوس الأول على القوس الثاني ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة حسب الإشارة

[2] إذا كان لدينا قوسين متشابهين بالقيمة والاشارة أو قوسين مختلفين نقوم بتوزيع القوس الاول على القوس الثاني ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة حسب الاشارة

**السؤال 1** بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

[1] $(\sqrt{12} - \sqrt{18})(\sqrt{12} + \sqrt{18}) = (\sqrt{12})^2 - (\sqrt{18})^2$

$= 12 - 18 = -6$

[2] $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2$

$= 5 - 3 = 2$

[3] $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})$

$= 7 - \sqrt{14} - \sqrt{14} + 2$

$= 9 - 2\sqrt{14}$

[4] $\sqrt{12}(\sqrt{3}-\sqrt{8})-6 = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2\sqrt{2})-6$

$= 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}-6$

$= \cancel{6}-4\sqrt{6}-\cancel{6} = -4\sqrt{6}$

| | |
|---|---|
| 2 | 8 |
| 2 | 4 |
| 2 | 2 |
| $2\sqrt{2}$ | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 3 |
| $2\sqrt{3}$ | 1 |

[5] $\sqrt{7}(\sqrt{28}-\sqrt{2})-5 = \sqrt{7}(2\sqrt{7}-\sqrt{2})-5$

$= \sqrt{7}\times 2\sqrt{7}-\sqrt{7}\times\sqrt{2}-5$

$= 14-\sqrt{14}-5 = 9-\sqrt{14}$

الأكبر ونطرح

| | |
|---|---|
| 2 | 28 |
| 2 | 14 |
| 7 | 7 |
| $2\sqrt{7}$ | 1 |

## خواص الجذور التكعيبية

[1] $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ $\quad \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$

[2] $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$ $\quad \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5} = 5$

[3] $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

[4] $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$

[5] $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

**حفظ**

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{216} = 6$

**السؤال 2** بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

**[1]** $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\sqrt{28}\right)$

| | |
|---|---|
| 2 | 28 |
| 2 | 14 |
| 7 | 7 |
| $2\sqrt{7}$ | 1 |

$$=-3\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\times 2\sqrt{7}\right)$$

$$=-3\times\frac{1}{9}\sqrt{7}+3\times\frac{2}{9}\sqrt{7}$$

توحيد مقامات

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{2}{3}\sqrt{7}$$

$$=\frac{-1+2}{3}\sqrt{7}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{7}$$

**[2]** $(-125)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{12}\right)$

| | |
|---|---|
| 2 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 3 |
| $2\sqrt{3}$ | 1 |

$$=-5\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\times 2\sqrt{3}\right)$$

$$=-5\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\right)$$

$$=-5\times\frac{1}{10}\sqrt{3}+5\times\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

توحيد مقامات

$$=\frac{-1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$=\frac{4}{2}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

**[3]** $(\sqrt{125}-\sqrt{20})\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)=(5\sqrt{5}-2\sqrt{5})\left(\frac{2}{3}\right)$

| | |
|---|---|
| 2 | 20 |
| 2 | 10 |
| 5 | 5 |
| $2\sqrt{5}$ | 1 |

| | |
|---|---|
| 5 | 125 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| $5\sqrt{5}$ | 1 |

$$=3\sqrt{5}\times\frac{2}{3}=2\sqrt{5}$$

**ملاحظة**

في الأسئلة التي تحتوي على عملية القسمة نتبع ما يأتي:

[1] نقلب القسمة الى ضرب وقلب الكسر الذي بعد القسمة.

[2] نضع الجذور في أبسط صورة.

[3] نجري عملية الاختصار أن وجدت ثم نجد الناتج.

**السؤال 3** بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

**[1]** $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right)$

| | |
|---|---|
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| $3\sqrt{3}$ | 1 |

$=\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\times\left(\frac{\sqrt{27}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\right)$ توحيد مقامات

$=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

$=\frac{-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=-1$

**[2]** $\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}}\div\frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}}\times\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{24}}$

| | |
|---|---|
| 2 | 24 |
| 2 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 3 |
| $2\sqrt{2}\sqrt{3}$ | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 3 |
| $2\sqrt{3}$ | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 8 |
| 2 | 4 |
| 2 | 2 |
| $2\sqrt{2}$ | 1 |

$=\frac{4\times2\sqrt{3}}{5(-3)}\times\frac{2\sqrt{2}}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{-4}{15}$

## تنسيب المقام

إذا كان المقام يحتوي على جذر فيجب التخلص منه هنالك حالتان:

1) إذا كان المقام يتكون من حد واحد نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام. أي أن:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

2) إذا كان المقام يتكون من حدين نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام بعكس الإشارة.

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

**السؤال 4** بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

[1] $\frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{7\sqrt{5}-5}{5}$

[2] $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$

$= \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}-3}{4(3)} = \frac{\sqrt{3}-3}{12}$

[3] $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{1-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{\sqrt{5}-2(5)}{5} = \frac{\sqrt{5}-10}{5}$

| | |
|---|---|
| 2 \| 20 | |
| 2 \| 10 | |
| 5 \| 5 | |
| $2\sqrt{5}$ \| 1 | |

[4] $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

$= \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

$= \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}+\sqrt{7}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}$

$= \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{12-7} = \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{5}$

[5] $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$

$= \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \frac{5\sqrt{6}-3}{6} - \frac{10\sqrt{6}-6}{12}$

توحيد مقامات

$= \frac{2(5\sqrt{6}-3)-(10\sqrt{6}-6)}{12}$

$= \frac{10\sqrt{6}-6-10\sqrt{6}+6}{12} = \frac{0}{12} = 0$

**السؤال 5** — مسائل حياتية

**الأقمار الصناعية:** يستعمل القمر الصناعي بصفة أساسية في الاتصالات مثل إشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الأعاصير اذ تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية : $v = \sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}\ m/sec$ اذ r نصف قطر المدار ( بعد القمر عن مركز الأرض ) . ما سرعة القمر اذا كان نصف قطر المدار 300km ؟

**الحل**

نحول نصف القطر من km الى m

$$r = 300km = 300 \times 1000 = 3 \times 10^5 m$$

$$V = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{r}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{3 \times 10^5}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14-5}}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 \times 10^9}{3}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^8 \times 10}{3}} = \frac{2 \times 10^4 \times \sqrt{10}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2 \times 10^4 \times \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 10^4 \times \sqrt{30}}{3}$$

$$= \frac{2 \times 5.47 \times 10^4}{3} = \frac{10.94 \times 10^4}{3} = 3.65 \times 10^4\ m/sec$$

**ملاحظة**

اذا كان المقدار بالصورة : $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

**السؤال 6** — فـــكر

أثبت صحة ما يأتي: $\left(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}\right)$

**الحل**

$$LHS = \left(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$= 7 - 5 = 2 \quad RHS$$

# الدرس 2 التطبيقات

## التطبيق وتمثيله في المستوي الإحداثي

**التطبيق:** لتكن R علاقة من المجموعة X ( المجال ) الى المجموعة Y ( المجال المقابل ) حيث كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر وحيد من عناصر Y عندئذ تسمى العلاقة R تطبيق وتكتب $R : X \rightarrow Y$ .

المجال ← X — Y → المجال المقابل

**الزوج المرتب:** هي مجموعة الأزواج المرتبة $(x, y)$ اذ ينتمي المسقط الأول (( الإحداثي الأول )) الى المجموعة X والمسقط الثاني (( الإحداثي الثاني )) الى المجموعة Y

**المدى:** يمثل المدى المسقط الثاني من الأزواج المرتبة $(x, y)$ أي تمثل صور عناصر المجال (( النواتج ))

**السؤال 1**

اذا كانت $R : X \rightarrow Y$ تمثل تطبيقا بقاعدة اقتران $y = \frac{1}{2}x$ من المجموعة $X = \{4, 6, 8\}$ الى المجموعة $Y = \{2, 3, 4, 5\}$ . اكتب التطبيق على شكل أزواج مرتبة ثم مثل التطبيق بمخطط سهمي وحدد المجال والمدى للتطبيق.

**الحل**

$$y = \frac{1}{2}x \quad , \quad x = \{4, 6, 8\}$$

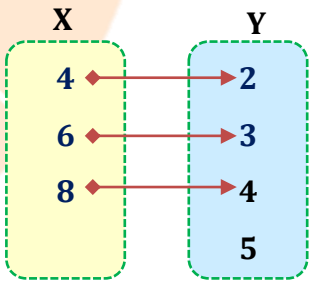
$$y = \frac{1}{2} \times \overset{2}{\cancel{4}} = 2$$

$$y = \frac{1}{2} \times \overset{3}{\cancel{6}} = 3$$

$$y = \frac{1}{2} \times \overset{4}{\cancel{8}} = 4$$

الأزواج المرتبة $R = \{(4, 2) , (6, 3) , (8, 4)\}$

المخطط السهمي




المجال $= \{4, 6, 8\} = x$

المدى $= \{2, 3, 4\}$

السؤال 2

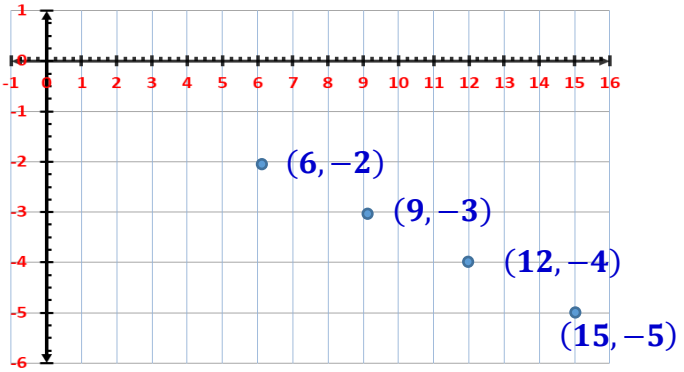
مسائل حياتية

**درجات الحرارة: سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية:**

$R = \{(6,-2),(9,-3),(12,-4),(15,-5)\}$ **اذ يمثل الاحداثي الأول بالساعة والاحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية. مثل العلاقة بجدول ومثلها بالمستوي الاحداثي بيانيا هل تمثل العلاقة تطبيقا أم لا؟**

الحل

| الوقت (X) | 6 | 9 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| درجة الحرارة (Y) | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ |




العلاقة تمثل تطبيقا لأن كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر واحد من عناصر Y

ملاحظة

اذا طلب بالسؤال كتابة قاعدة الاقتران نطبق القاعدة $f(x) = a + (x-1)b$ لإيجاد قيمة $a, b$ نتبع ما يأتي:

[1] نأخذ أول زوجين مرتبين $(x_2, y_2)$ , $(x_1, y_1)$ ومنها نجد قيمة $a = y_1$ و قيمة $b$ حيث $b = y_2 - y_1$

[2] نعوض قيمة $a, b$ في $f(x) = a + (x-1)b$ ثم نتخلص من الأقواس ونبسط المقدار ومنها نجد قاعدة الاقتران

**السؤال 3**

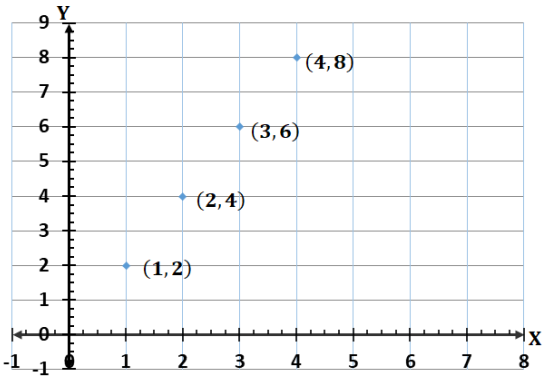
**الجدول التالي يمثل العلاقة بين الوزن (كغم) وسعر السمك**
**هل تمثل العلاقة تطبيقا؟ إذا كانت تطبيقا فاكتب قاعدة الاقتران**
**وحدد المجال والمدى ومثله في المستوي الإحداثي.**

| الوزن / كغم X | السعر بألوف الدنانير Y |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |

**الحل**

قاعدة الاقتران $f(x) = 2x$

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$ ، المدى $= \{2, 4, 6, 8\}$




| $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ | غير مطلوب بالحل |
|---|---|
| $(1,2)$ , $(2,4)$ | $f(x) = a + (x-1)b$ |
| $a = y_1 = 2$ | $f(x) = 2 + (x-1)(2)$ |
| $b = y_2 - y_1$ | $= 2 + 2x - 2$ |
| $b = 4 - 2 = 2$ | $f(x) = 2x$ |

**السؤال 4**

**اكتب قاعدة اقتران للتطبيق ومثله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى لها:**

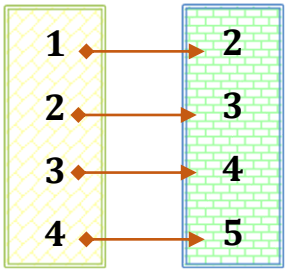
[1] $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$

**الحل**

قاعدة الاقتران : $f(x) = x + 1$

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

المدى $= \{2, 3, 4, 5\}$




| $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ | غير مطلوب بالحل |
|---|---|
| $(1,2)$ , $(2,3)$ | $f(x) = a + (x-1)b$ |
| $a = y_1 = 2$ | $f(x) = 2 + (x-1)(1)$ |
| $b = y_2 - y_1$ | $= 2 + x - 1$ |
| $b = 3 - 2 = 1$ | $f(x) = x + 1$ |

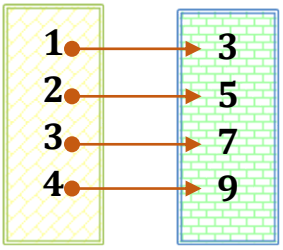
[2] $g = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$

الحل

قاعدة الاقتران : $g(x) = 2x + 1$

المجال $= \{1,2,3,4\}$

المدى $= \{3,5,7,9\}$




| $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ |
|---|
| $(1,3)\ ,(2,5)$ |
| $a = y_1 = 3$ |
| $b = y_2 - y_1$ |
| $b = 5 - 3 = 2$ |

غير مطلوب بالحل

$g(x) = a + (x-1)b$

$g(x) = 3 + (x-1)(2)$

$= 3 + 2x - 2$

$g(x) = 2x + 1$

**السؤال 5** اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها:

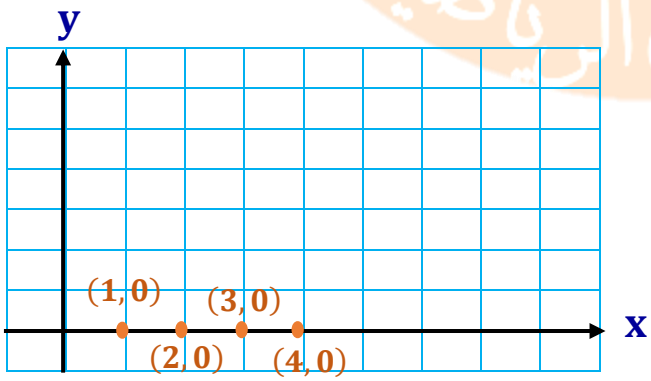
[1] $f = \{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)\}$

الحل

قاعدة الاقتران : $f(x) = 0$

المجال $= \{1,2,3,4\}$

المدى $= \{0\}$



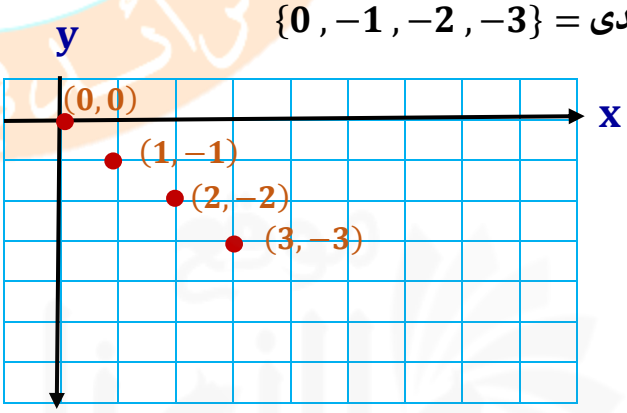

[2] $g = \{(0,0),(1,-1),(2,-2),(3,-3)\}$

الحل

قاعدة الاقتران : $g(x) = -x$

المجال $= \{0,1,2,3\}$

المدى $= \{0\ ,-1\ ,-2\ ,-3\}$



# أنواع التطبيق

## أولاً التطبيق الشامل

يكون التطبيق $f : X \to Y$ شامل اذا كان

المدى = المجال المقابل

يكون التطبيق $f : X \to Y$ غير شامل اذا كان

[1] المدى ≠ المجال المقابل

[2] اذا كان المجال المقابل $N , Z , R , Q$

## ثانياً التطبيق المتباين

يكون التطبيق $f: X \to Y$ متباين اذا كان كل عنصر في $X$ يرتبط بعنصر واحد من $Y$ أي أن :

$$\forall x_1, x_2 \in X \ , x_1 \neq x_2 \ \to \ f(x_1) \neq f(x_2)$$

((النواتج مختلفة))

يكون التطبيق $f: X \to Y$ غير متباين اذا كان :

$$\forall x_1, x_2 \in X \ , x_1 \neq x_2 \ \to \ f(x_1) = f(x_2)$$

((النواتج متشابهة))

## ثالثاً التطبيق التقابل

يكون التطبيق تقابل إذا كان التطبيق شامل ومتباين

الأعداد الطبيعية : $N = \{1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots\dots\}$

الأعداد الصحيحة : $Z = \{0, \mp 1, \mp 2, \dots\dots\dots\dots\dots\}$

**السؤال 6**

اذا كانت : $f : Z \to Z$ حيث : $f(x) = 2x^2 - 3$ بين نوع التطبيق حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة .

**الحل**

$f(x) = 2x^2 - 3 \quad , \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

$f(0) = 2(0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$

$f(1) = 2(1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(2) = 2(2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$

المدى $= \{-3 , -1 , 5 , \dots \dots \dots .\}$

التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل Z

التطبيق ليس متباينا لأن النواتج مختلفة

$f(1) = f(-1) = -1$ بينما $1 \neq -1$

**السؤال 7**

اذا كان التطبيق $f : N \to N$ اذ أن : $f(x) = 3x + 2$ بين هل أن التطبيق شامل أم لا ؟

**الحل**

$f(x) = 3x + 2 \quad , \quad N = \{1, 2, 3, \dots \dots .\}$

$f(1) = 3(1) + 2 = 5$

$f(2) = 3(2) + 2 = 8$

$f(3) = 3(3) + 2 = 11$

المدى $= \{5, 8, 11, \dots \dots \dots .\}$

التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل N

## تركيب التطبيقات

[1] $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

[2] $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

**السؤال 8**

اذا كان : $f: N \to N$ حيث : $f(x) = 2x + 1$ و $g: N \to N$ حيث : $g(x) = x^2$ جد :

1) $(f \circ g)(3)$ 2) $(g \circ f)(3)$ وماذا تلاحظ؟ 3) جد قيمة x اذا كان : $(f \circ g)(x) = 33$

**الحل**

1) $(f \circ g)(3) = f[g(3)]$

$= f[(3)^2] = f(9)$

$= 2(9) + 1 = 19$

2) $(g \circ f)(3) = g[f(3)]$

$= g[2(3) + 1] = g(7)$

$= (7)^2 = 49$

نلاحظ أن:

$(f \circ g)(3) \neq (g \circ f)(3)$

3) $(f \circ g)(x) = 33$

$f[g(x)] = 33$

$f(x^2) = 33$

$2x^2 + 1 = 33$

$2x^2 = 33 - 1$

$2x^2 = 32 \} \div 2$

$x^2 = 16 \Rightarrow$ بالجذر $x = \mp 4$

أما $x = 4 \in N$

أو $x = -4 \notin N$ يهمل

---

**السؤال 9**

اذا كانت $f: N \to N$ حيث $f(x) = 5x + 2$ وأن $g: N \to N$ حيث $g(x) = x + 3$

اكتب التطبيق $f \circ g$ بكتابة الأزواج المرتبة لها واكتب مداها وبين نوعها ؟

**الحل**

$f \circ g(x) = f[g(x)]$ , $X = N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(1 + 3) = f(4) = 5(4) + 2 = 22$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(2 + 3) = f(5) = 5(5) + 2 = 27$

$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(3 + 3) = f(6) = 5(6) + 2 = 32$

الأزواج المرتبة $f \circ g = \{(1, 22), (2, 27), (3, 32), \ldots\ldots\ldots\}$

المدى $= \{22, 27, 32, \ldots\ldots\ldots\}$

التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل N

التطبيق متباين لأن $f \circ g(1) \neq f \circ g(2)$ بينما $1 \neq 2$ (( النواتج مختلفة )) ← التطبيق ليس تقابل .

**السؤال 10** ليكن التطبيقان $f : Z \to Z$ اذ $f(x) = 3x + 1$ وأن $g : \to A \to A$ حيث $g(x) = 2x + 5$

جد قيمة x اذا كان : $(f \circ g)(x) = 28$

**الحل**

$f[g(x)] = 28$

$f[2x + 5] = 28$

$3(2x + 5) + 1 = 28$

$6x + 15 + 1 = 28$

$6x + 16 = 28$

$6x = 28 - 16$

$6x = 12\} \div 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

---

**فكر**

**السؤال 11**

اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكان $f : A \to A$ و $g : A \longrightarrow A$ معرفان كما يلي :

$f = \{(1, 3) , (3, 3) , (2, 3)\}$ , $g = \{(3, 1) , (1, 2) , (2, 3)\}$ بين هل أن : $f \circ g = g \circ f$ ؟

**الحل**

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(2) = 3$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(3) = 3$

$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$

$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(3) = 1$

$g \circ f(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$

$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

# الدرس 3 المتتابعات

**المتتابعة :** هي دالة مجالها $N$ أو مجموعة جزئية مرتبة منتهية من $N$ أي أن : $f : N \longrightarrow R$ وتكتب على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة حيث المساقط الأولى تمثل عناصر المجال $N$ والمساقط الثانية تمثل عناصر المجال المقابل ( الصور ) كما في الشكل :

$$\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), \dots\dots\dots\dots, (n, f(n), \dots\dots)\}$$

**ملاحظة :** يسمى $u_n$ بالحد العام للمتتابعة $u_n = f(n)$ وتكتب المتتابعة بالصورة :

$$\{u_1, u_2, u_3, \dots\dots\dots\dots, u_i, \dots\dots\}$$

**السؤال 1**

**نظم جدولا يربط بين عدد الأيام وعدد اللوحات. اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطا؟ هل يمثل متتابعة؟**

| عدد اللوحات | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأيام | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |

**الحل**

الأزواج المرتبة $\{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15)\}$

نعم يمثل نمطا والعلاقة تمثل ((ثلاثة أمثال)) والعلاقة تمثل متتابعة حدها العام هو

$u_n = 3n \quad , \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

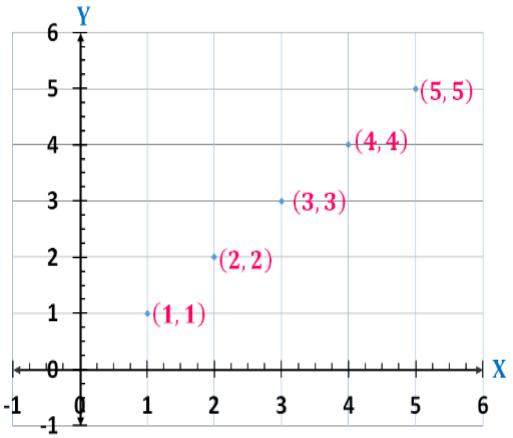
تكتب بالشكل الاتي: $\{u_n\} = 3n = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

**السؤال 2** اكتب الأزواج المرتبة الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$ ومثلها في المستوي الاحداثي :

$[1]\ u_n = n$

**الحل**

$u_1 = 1$
$u_2 = 2$
$u_3 = 3$
$u_4 = 4$
$u_5 = 5$



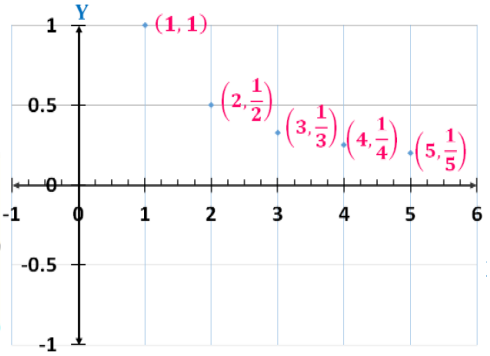

الأزواج المرتبة هي:

$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

$[2]\ u_n = \frac{1}{n}$

**الحل**

$u_1 = \frac{1}{1} = 1$
$u_2 = \frac{1}{2}$
$u_3 = \frac{1}{3}$
$u_4 = \frac{1}{4}$
$u_5 = \frac{1}{5}$




الأزواج المرتبة هي:

$\left\{(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),\left(4,\frac{1}{4}\right),\left(5,\frac{1}{5}\right)\right\}$

**السؤال 3** اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

$[1]\ u_n = \{2n-1\}$

**الحل**

$u_1 = 2(1) - 1 = 1$
$u_2 = 2(2) - 1 = 3$
$u_3 = 2(3) - 1 = 5$
$u_4 = 2(4) - 1 = 7$
$u_5 = 2(5) - 1 = 9$

المتتابعة هي : $\{1,3,5,7,9\}$

$[2]\ \{u_n\} = (-1)^n$

**الحل**

$u_1 = (-1)^1 = -1$
$u_2 = (-1)^2 = 1$
$u_3 = (-1)^3 = -1$
$u_4 = (-1)^4 = 1$
$u_5 = (-1)^5 = -1$

المتتابعة هي: $\{1,1,-1,1,-1\}$

[4] $\{u_n\} = n^2$

الحل

$u_1 = (1)^2 = 1$

$u_2 = (2)^2 = 4$

$u_3 = (3)^2 = 9$

$u_4 = (4)^2 = 16$

$u_5 = (5)^2 = 25$

المتتابعة هي : $\{1, 4, 9, 16, 25\}$

[5] $\{u_n\} = n^3$

الحل

$u_1 = (1)^3 = 1$

$u_2 = (2)^3 = 8$

$u_3 = (3)^3 = 27$

$u_4 = (4)^3 = 64$

$u_5 = (5)^3 = 125$

المتتابعة هي : $\{1, 8, 27, 64, 125\}$

[7] $\{u_n\} = 4n$

$u_1 = 4(1) = 4$

$u_2 = 4(2) = 8$

$u_3 = 4(3) = 12$

$u_4 = 4(4) = 16$

$u_5 = 4(5) = 20$

المتتابعة : $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

[3] $\{u_n\} = \frac{n}{3}$

الحل

$u_1 = \frac{1}{3}$

$u_2 = \frac{2}{3}$

$u_3 = \frac{3}{3} = 1$

$u_4 = \frac{4}{3}$

$u_5 = \frac{5}{3}$

المتتابعة هي: $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

[6] $\{u_n\} = \frac{1}{n+1}$

الحل

$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

$u_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

$u_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$

$u_5 = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$

المتتابعة هي: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$

[9] $\{u_n\} = 9$

الحل

$u_1 = 9$

$u_2 = 9$

$u_3 = 9$

$u_4 = 9$

$u_5 = 9$

المتتابعة : $\{9, 9, 9, 9, 9\}$

[8] $\{u_n\} = 2n - 5$

الحل

$u_1 = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$

$u_2 = 2(2) - 5 = 4 - 5 = -1$

$u_3 = 2(3) - 5 = 6 - 5 = 1$

$u_4 = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3$

$u_5 = 2(5) - 5 = 10 - 5 = 5$

المتتابعة : $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$

---

السؤال 4 أكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى:

[2] $u_n = n - 4$

الحل

$u_1 = 1 - 4 = -3$

$u_2 = 2 - 4 = -2$

$u_3 = 3 - 4 = -1$

$u_4 = 4 - 4 = 0$

الأزواج المرتبة:

$\{(1, -3), (2, -2), (3, -1), (4, 0)\}$

[1] $u_n = 3n$

الحل

$u_1 = 3(1) = 3$

$u_2 = 3(2) = 6$

$u_3 = 3(3) = 9$

$u_4 = 3(4) = 12$

الأزواج المرتبة : $\{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

[3] $u_n = 3n - 1$

الحل

$u_1 = 3(1) - 1 = 2$

$u_2 = 3(2) - 1 = 5$

$u_3 = 3(3) - 1 = 8$

$u_4 = 3(4) - 1 = 11$

الأزواج المرتبة:

$\{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (4, 11)\}$

[4] $u_n = 3n^2$

الحل

$u_1 = 3(1)^2 = 3$

$u_2 = 3(2)^2 = 12$

$u_3 = 3(3)^2 = 27$

$u_4 = 3(4)^2 = 48$

الأزواج المرتبة:

$\{(1,3),(2,12),(3,27),(4,48)\}$

[5] $u_n = \frac{1}{2n}$

الحل

$u_1 = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$

$u_3 = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$

$u_4 = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}$

الأزواج المرتبة $\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(2,\frac{1}{4}\right),\left(3,\frac{1}{6}\right),\left(4,\frac{1}{8}\right)\right\}$

## المتتابعة الحسابية

تكتب المتتابعة بالشكل: $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots\}$

قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية ← $u_n = a + (n-1)d$

$u_n$ : الحد الذي قيمته n

n : عدد الحدود

a : الحد الأول

d : الأساس

الأساس d = الحد الثاني − الحد الأول

أو الأساس d = الحد الثالث − الحد الثاني

$d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

ملاحظة

لإيجاد المتتابعة الحسابية اذا علم حدها الأول a وأساسها d نستخدم :

$a = u_1 \xrightarrow{+d} u_2 \xrightarrow{+d} u_3 \xrightarrow{+d} \ldots\ldots \xrightarrow{+d} u_n$

## الجزء الأول
الأسئلة الخاصة لكتابة المتتابعة الحسابية بمعرفة حدها الأول a وأساسها d

### السؤال 5
أكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية الحد الأول فيها $(3)$ وأساسها $(6)$ .

**الحل**

$a = u_1 = 3 \ , \quad d = 6$

$u_2 = 3 + 6 = 9$

$u_3 = 9 + 6 = 15$

$u_4 = 15 + 6 = 21$

$u_5 = 21 + 6 = 27$

المتتابعة هي : $\{3, 9, 15, 21, 27\}$

### السؤال 6
أكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية الحد الأول فيها $(1)$ وأساسها $(-3)$ .

**الحل**

$a = u_1 = 1 \ , \quad d = -3$

$u_2 = 1 + (-3) = 1 - 3 = -2$

$u_3 = -2 + (-3) = -2 - 3 = -5$

$u_4 = -5 + (-3) = -5 - 3 = -8$

$u_5 = -8 + (-3) = -8 - 3 = -11$

المتتابعة هي : $\{1, -2, -5, -8, -11\}$

### السؤال 7
أكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية الحد الأول فيها $(1)$ وأساسها $(5)$ .

**الحل**

$a = u_1 = 1 \ , \quad d = 5$

$u_2 = u_1 + d = 1 + 5 = 6$

$u_3 = u_2 + d = 6 + 5 = 11$

$u_4 = u_3 + d = 11 + 5 = 16$

$u_5 = u_4 + d = 16 + 5 = 21$

المتتابعة الحسابية : $\{1, 6, 11, 16, 21\}$

### السؤال 8
أكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية الحد الأول فيها $(-5)$ وأساسها $(2)$ .

**الحل**

$a = u_1 = -5 \ , \quad d = 2$

$u_2 = -5 + 2 = -3$

$u_3 = -3 + 2 = -1$

$u_4 = -1 + 2 = 1$

$u_5 = 1 + 2 = 3$

المتتابعة الحسابية : $\{-5, -3, -1, 1, 3\}$

**السؤال 9** أكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية الحد الأول فيها $(-3)$ وأساسها $(-4)$ .

**الحل**

$a = u_1 = -3 \quad , \quad d = -4$

$u_2 = -3 + (-4) = -3 - 4 = -7$

$u_3 = -7 + (-4) = -7 - 4 = -11$

$u_4 = -11 + (-4) = -11 - 4 = -15$

$u_5 = -15 + (-4) = -15 - 4 = -19$

المتتابعة الحسابية : $\{-3, -7, -11, -15, -19\}$

---

**الجزء الثاني** الأسئلة الخاصة لكتابة المتتابعة الحسابية بمعرفة قيمة حدها $u_n$ وأساسها $d$ لإيجاد قيمة $a$

*اذا اعطى بالسؤال الحد السابع $= 25$ يكتب بالشكل $u_7 = 25 \ , n = 7$

*اذا اعطى بالسؤال الحد الثالث $= -8$ يكتب بالشكل $u_3 = -8 \ , n = 3$

**السؤال 10** أكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية التي حدها السابع $(36)$ وأساسها $(4)$ .

**الحل**

$u_7 = 36 \quad , \quad n = 7 \quad , \quad d = 4 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$ القانون

$36 = a + (7-1)(4)$

$36 = a + 24$

$a = 36 - 24 \quad \Rightarrow \quad a = 12$

المتتابعة هي : $\{12, 16, 20, 24, 28\}$

## الجزء الثالث الأسئلة الخاصة لإيجاد الحدود بين $u_m$ , $u_n$

### السؤال 11

متتابعة حسابية حدها الثالث $(8)$ و $d = -3$

جد الحدود بين $u_7, u_{11}$

الحل

$u_3 = 8$ , $n = 3$ , $d = -3$ , $a = ?$

القانون $u_n = a + (n-1)d$

$8 = a + (3-1)(-3)$

$8 = a - 6$

$a = 8 + 6 \Rightarrow a = 14$

$u_8 = 14 + (8-1)(-3)$

$= 14 - 21 = -7$

$u_9 = 14 + (9-1)(-3)$

$= 14 - 24 = -10$

$u_{10} = 14 + (10-1)(-3)$

$= 14 - 27 = -13$

الحدود هي: $\{-7, -10, -13\}$

### السؤال 12

جد الحدود بين $u_8$ و $u_{12}$ لمتتابعة حسابية حدها الثالث $(9)$ و $d = -2$

الحل

$u_3 = 9$ , $n = 3$ , $d = -2$ , $a = ?$

القانون $u_n = a + (n-1)d$

$9 = a + (3-1)(-2)$

$9 = a - 4$

$a = 9 + 4 \Rightarrow a = 13$

$u_9 = 13 + (9-1)(-2)$

$= 13 - 16 = -3$

$u_{10} = 13 + (10-1)(-2)$

$= 13 - 18 = -5$

$u_{11} = 13 + (11-1)(-2)$

$= 13 - 20 = -7$

الحدود هي $\{-3, -5, -7\}$

**السؤال 13** جد الحدود بين $u_6$ و $u_{10}$ لمتتابعة حسابية حدها السادس $(-11)$ و $d = -3$

**الحل**

$u_6 = -11 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad d = -3 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$ القانون

$-11 = a + (6-1)(-3)$

$-11 = a - 15$

$a = -11 + 15 \implies a = 4$

$u_7 = 4 + (7-1)(-3) = 4 - 18 = -14$

$u_8 = 4 + (8-1)(-3) = 4 - 21 = -17$

$u_9 = 4 + (9-1)(-3) = 4 - 24 = -20$

الحدود هي : $\{-14, -17, -20\}$

## الجزء الرابع نوع المتتابعة

المتتابعة ثلاثة أنواع هي:

1. تكون المتتابعة متزايدة اذا كانت : $d > 0$ (موجبة)
2. تكون المتتابعة متناقصة اذا كانت : $d < 0$ (سالبة)
3. تكون المتتابعة ثابتة اذا كانت : $d = 0$

**السؤال 14**

جد الحد العشرين من المتتابعة الحسابية $\{6, 1, -4, -9, \dots\dots.\}$ وحدد ما اذا كانت المتتابعة متناقصة أم متزايدة ؟

**الحل**

$u_1 \quad u_2$

$\{6 \quad , 1 \quad , -4, -9, \dots\dots.\}$

$a = 6 \ , \ d = 1 - 6 = -5$

$u_{20} = ? \quad n = 20$

$u_n = a + (n-1)d$ القانون

$u_{20} = 6 + (20-1)(-5)$

$= 6 + (19)(-5)$

$= 6 - 95 = -89$

المتتابعة متناقصة لأن : $d < 0$ ( سالبة)

**السؤال 15**

اكتب الحد الثالث والعشرين من المتتابعة الحسابية

$\{3, -1, -5, -9, \dots\dots.\}$

$u_1 \quad u_2$

**الحل**

$u_{23} = ? \quad , \quad n = 23 \quad , \quad a = 3$

$d = -1 - 3 = -4$

$u_n = a + (n-1)d$ القانون

$u_{23} = 3 + (23-1)(-4)$

$= 3 + (22)(-4)$

$= 3 - 88 = -85$

## مسائل حياتية

**السؤال 16**

رياضة الجري: في احدى مسابقات الجري سجلت أوقات الفائز الأول وفقا للجدول الآتي:

| المسافة بالمتر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| الوقت بالدقيقة والثانية | 3.12 | 6.32 | 9.52 | 12.72 | 15.92 |

اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطا؟ هل يمثل متتابعة؟ علل اجابتك.

**الحل**

الأزواج المرتبة $\{(1, 3.12), (2, 6.32), (3, 9.52), (4, 12.72), (5, 15.92)\}$

نعم يمثل نمطا لأن كل مسافة ناتجة من مقدار ثابت.

العلاقة تمثل متتابعة حسابية حدها الأول 3.12 وأساسها $d = 6.32 - 3.12 = 3.20$

المتتابعة هي : $\{3.12, 6.32, 9.52, 12.72, 15.92\}$

السؤال 17 جد قيمة x التي تجعل الحدود الثلاثة الأولى للمتتابعات الحسابية كما يأتي:

فـــكر

$$\{\underset{u_1}{2x}\ ,\underset{u_2}{x+1}\ ,\underset{u_3}{3x+11},\ldots\ldots\ldots\}$$

الحل

$d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$ قانون الأساس

$(x+1) - (2x) = (3x+11) - (x+1)$

$x + 1 - 2x = 3x + 11 - x - 1$

$-x + 1 = 2x + 10$

$2x + x = 1 - 10$

$3x = -9 \} \div 3 \quad \Rightarrow \quad x = -3$

## الدرس 4 المتباينات المركبة

**طريقة حل المتباينة المركبة:**

1) التخلص من الكسور والأقواس أن وجدت.
2) وضع المتغير في الوسط.
3) إذا كان هناك عدد مع المتغير تفصل بينهما عملية الجمع أو الطرح فنقوم بنقل العدد الى طرفي المتباينة مع تغير الإشارة.
4) إذا كان المتغير يحتوي على معامل فنقوم بقسمة أطراف المتباينة على معامل المتغير.
5) نجد مجموعة حل المتباينة المركبة.

ملاحظة

- عند ضرب أو قسمة أطراف المتباينة المركبة على عدد سالب فأن الترتيب يتغير (تقلب رموز المتباينة).
- اذا كانت المتباينة المركبة تحتوي على رمز $\leq$ أو $\geq$ فأن التمثيل على خط الأعداد يكون بفجوة ممتلئة بالصورة ( ● ) أي أن العدد داخل ضمن الفترة . أما إذا كانت المتباينة المركبة تحتوي على الرمز $<$ أو $>$ فأن التمثيل على خط الأعداد يكون بفجوة فارغة بالصورة ( ○ ) أي أن العدد غير داخل ضمن الفترة.

# المتباينات المركبة التي تتضمن ( و )

مجموعة الحل عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين ويمكن ايجاده بطريقتين:

**الطريقة الأولى :** بيانيا بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة التقاطع .

**الطريقة الثانية :** جبريا وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما $(S = S_1 \cap S_2)$

**ملاحظة :** تحتوي المتباينة على الرمز $<\ ,\ >\ ,\ \leq\ ,\ \geq$

**السؤال 1** حل المتباينات المركبة التي تتضمن ( و ) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

$[1]\ -3 \leq 3x + 2 < 9$

الحل

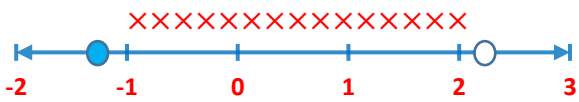
$-3 \leq 3x + 2 < 9$

$-3 - 2 \leq 3x < 9 - 2$

$-5 \leq 3x < 7 \ \} \div 3$

$\frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3}$

$S = \left\{x : \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3}\right\}$




$[2]\ -9 < 2x - 1 \leq 3$

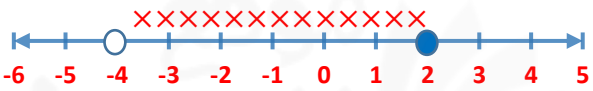
الحل

$-9 + 1 < 2x \leq 3 + 1$

$-8 < 2x < 4 \ \} \div 2$

$-4 < x \leq 2$

$S = \{x : -4 < x \leq 2\}$

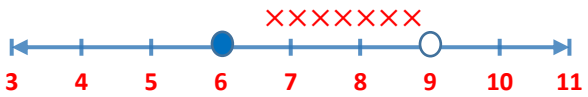


[3] $x + 6 \geq 12$ و $x + 6 < 15$

الحل

$x \geq 12 - 6$ و $x < 15 - 6$

$x \geq 6$ و $x < 9$




$S = \{x: x \geq 6\} \cap \{x: x < 9\}$

السؤال 2

تقاس درجات حرارة الجو خلال اليوم الواحد بدرجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى لكونها متغيرة من وقت لآخر. فإذا كانت درجة الحرارة السيليزية الصغرى في مدينة بغداد في شهر كانون الأول $8°C$ ودرجة الحرارة السيليزية الكبرى $15°C$ . اكتب متباينة تمثل درجة الحرارة في بغداد وجد حلّها

الحل

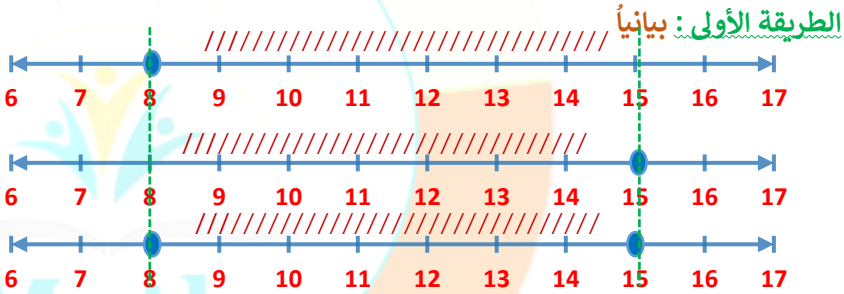
درجة الحرارة ( الصغرى ) لا تقل عن $8°$ : $(x \geq 8°)$ ، درجة الحرارة ( الكبرى ) لا تزيد عن $15°$ : $(x \leq 15°)$

الطريقة الأولى : بيانياً

$x \geq 8$

$x \leq 15$

$8 \leq x \leq 15$




الطريقة الثانية : جبرياً

$8 \leq x \leq 15 \iff x \geq 8$ و $x \leq 15$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 8\} \cap \{x : x \leq 15\}$

**السؤال 3** حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

[1] $-4 \leq y-1 < 3$

**الحل**

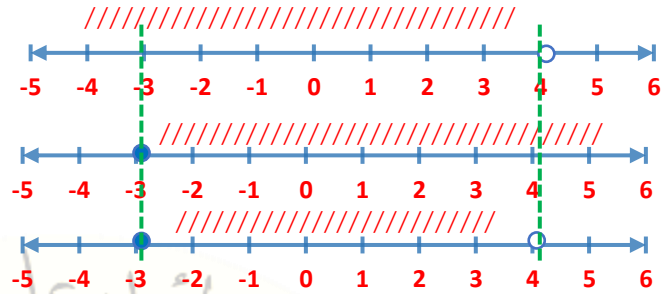
$-4+1 \leq y < 3+1$

$-3 \leq y < 4$

$y < 4$

$y \geq -3$

$-3 \leq y < 4$




[2] $-4 \leq Z+2 \leq 8$

**الحل**

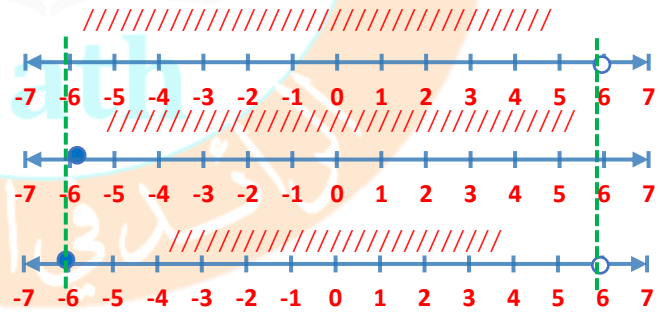
$-4-2 \leq Z < 8-2$

$-6 \leq Z < 6$

$Z < 6$

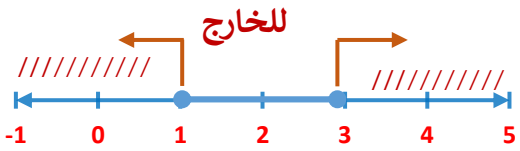
$Z \geq -6$

$-6 \leq Z < 6$



# المتباينات المركبة التي تتضمن ( أو )

طريقة حل المتباينة هي نفس طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط ( و ) لكن بدل ان نأخذ مجموعة تقاطع الجزئيين نأخذ مجموعة اتحاد الجزئيين $S = S_1 \cup S_2$




**السؤال 4** حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

**[1]** $y - 3 \leq -1$ أو $y + 3 > 6$

الحل

$y \leq -1 + 3$ أو $y > 6 - 3$

$y \leq 2$ أو $y > 3$

$S = \{y : y \leq 2\} \cup \{y : y > 3\}$

**[2]** $x + 15 \geq 30$ أو $x + 15 < 22$

الحل

$x \geq 30 - 15$ أو $x < 22 - 15$

$x \geq 15$ أو $x < 7$

$S = \{x : x \geq 15\} \cup \{x : x < 7\}$

**[3]** $3n - 7 \leq -9$ أو $3n - 7 > -5$

الحل

$3n \leq -9 + 7$ أو $3n > -5 + 7$

$3n \leq -2$ أو $3n > 2$ $\} \div 3$

$n \leq \frac{-2}{3}$ أو $n > \frac{2}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{n : n \leq \frac{-2}{3}\right\} \cup \left\{n : n > \frac{2}{3}\right\}$

[4] $\frac{2v+1}{3} > \frac{5}{3}$ أو $\frac{2v+1}{3} < \frac{1}{3}$ } $\times 3$

الحل

$\frac{2v+1}{3} \times 3 > \frac{5}{3} \times 3$ أو $\frac{2v+1}{3} \times 3 < \frac{1}{3} \times 3$

$2v+1 > 5$ أو $2v+1 < 1$

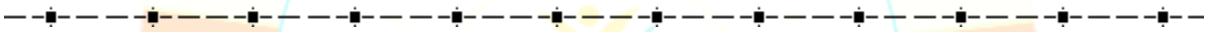
$2v > 5-1$ أو $2v < 1-1$

$2v > 4$ أو $2v < 0$

$2v > 4$ أو $2v < 0$ } $\div 2$

$v > 2$ أو $v < 0$

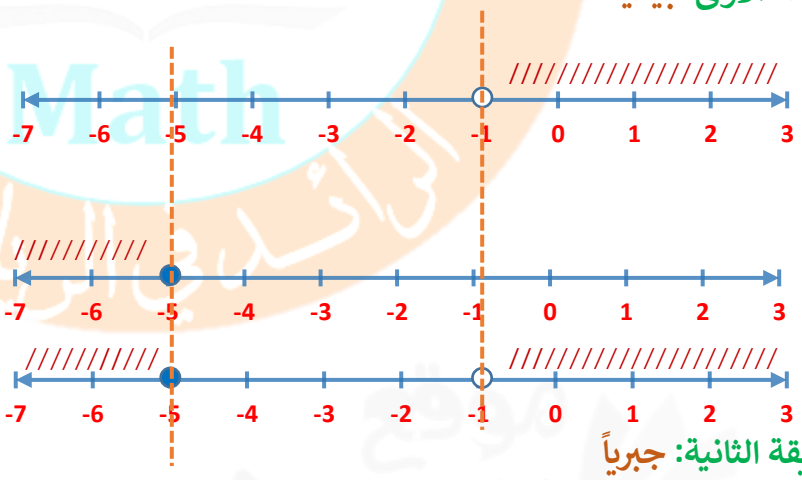
$S = \{v : v > 2\} \cup \{v : v < 0\}$



السؤال 5

حل المتباينة المركبة $x+3 > 2$ أو $x+3 \leq -2$ بيانيا وجبريا .

الطريقة الأولى: بيانياً




الطريقة الثانية: جبرياً

$x+3 > 2 \Rightarrow x > 2-3$

$x > -1$

$x+3 \leq -2$

$x \leq -2-3$

$x \leq -5$

$x \leq -5$ أو $x > -1$

$x+3 \leq -2$ أو $x+3 > 2$

$x \leq -2-3$ أو $x > 2-3$

$x \leq -5$ أو $x > -1$

$S = \{x : x > -1\} \cup \{x : x \leq -5\}$

السؤال 6 حل المتباينات المركبة التي تتضمن ( أو ) بيانيا

[1] $8y \geq 64$ أو $8y \leq 32$ $\} \div 8$

الحل

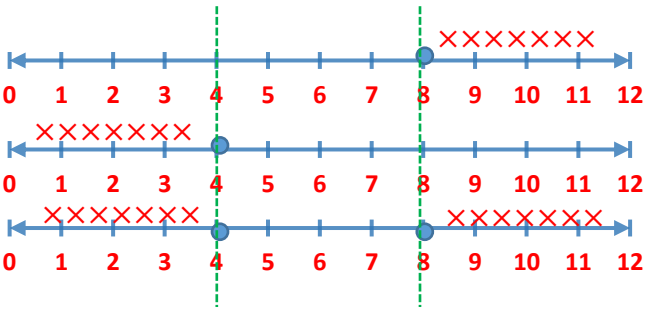
$8y \geq 64 \} \div 8$

$y \geq 8$

$8y \leq 32 \} \div 8$

$y \leq 4$

$y \geq 8$ أو $y \leq 4$




[2] $\frac{2Z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2Z}{3} \geq \frac{8}{9}$

الحل

$\frac{2Z}{3} < \frac{2}{3} \} \times 3$

$2Z < 2 \} \div 2$

$Z < 1$

$\frac{2Z}{3} \geq \frac{8}{9} \} \times 9$

$6Z \geq 8 \} \div 6$

$Z \geq \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_{3}}$

$Z \geq \frac{4}{3}$

$Z < 1$ أو $Z \geq \frac{4}{3}$

السؤال 7

مسائل حياتية

صوت : أذن الأنسان يمن أن تسمع الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هيرتزا ولا يزيد عن 20000 هيرتز .اكتب المتباينة المركبة تمثل الترددات التي لا تسمعها أذن الأنسان ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد .

الحل

نفرض التردد x

الترددات التي تسمعها أذن الأنسان هي أكبر أو يساوي 20 وأصغر أو يساوي 20000 تكتب $20 \leq x \leq 20000$

الترددات التي لا تسمعها أذن الأنسان هي أصغر من 20 واكبر من 20000 وتكتب :

$x < 20$ أو $x > 20000$

$x < 20$

$x > 20000$

$x < 20$ أو $x > 20000$

## المتباينات المثلثية

في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث . اذا كانت اطوال اضلاع المثلث $(A , B , C)$ فيجب أن تكون المتباينات الثلاث صحيحة :

$$A + B > C \quad , \quad A + C > B \quad , \quad B + C > A$$

السؤال 8 هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي:

[2] 5cm , 4cm , 9cm

الحل

خاطئة $5 + 4 \not> 9 \Rightarrow 9 \not> 9$

صحيحة $5 + 9 > 4 \Rightarrow 14 > 4$

صحيحة $4 + 9 > 5 \Rightarrow 13 > 5$

لا يمكن رسم مثلث.

[1] 2cm , 10cm , 13cm

الحل

خاطئة $2 + 10 \not> 13 \Rightarrow 12 \not> 13$

صحيحة $2 + 13 > 10 \Rightarrow 15 > 10$

صحيحة $10 + 13 > 2 \Rightarrow 23 > 2$

لا يمكن رسم مثلث .

[4] $3cm$ , $4cm$ , $2\sqrt{3}cm$

الحل

$3 + 4 > 2\sqrt{3} \Rightarrow 7 > \sqrt{3}$ صحيحة

$3 + 2\sqrt{3} > 4$ صحيحة

$4 + 2\sqrt{3} > 3$ صحيحة

يمكن رسم مثلث.

$\sqrt{3} = 1.7$

[3] $1cm$ , $\sqrt{2}cm$ , $\sqrt{2}cm$

الحل

$1 + \sqrt{2} > \sqrt{2}$ صحيحة

$\sqrt{2} + \sqrt{2} > 1 \Rightarrow 2\sqrt{2} > 1$ صحيحة

$\sqrt{2} + 1 > \sqrt{2}$ صحيحة

يمكن رسم مثلث.

$\sqrt{2} = 1.4$

السؤال 9

أكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث إذا كان طولا ضلعي المثلث معلومين:

$10cm , 8cm$

الحل

نفرض طول الضلع الثالث $= x$

$10cm , 8cm , x\ cm$

$10 + 8 > x \Rightarrow 18 > x$

$10 + x > 8 \Rightarrow x > 8 - 10 \Rightarrow x > -2$

$8 + x > 10 \Rightarrow x > 10 - 8 \Rightarrow x > 2$ لا تعطي معلومات مفيدة (تهمل)

المتباينة المركبة هي : $2 < x < 18$

السؤال 10

فـــكر

أكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث:

$7cm \ , \ 12cm \ , x \ cm$

الحل

$7 + 12 > x \quad \Rightarrow \quad 19 > x$

$12 + x > 7 \quad \Rightarrow \quad x > 7 - 12 \quad \Rightarrow \quad x > -5$ لا تعطي معلومات مفيدة (تهمل)

$7 + x > 12 \quad \Rightarrow \quad x > 12 - 7 \quad \Rightarrow \quad x > 5$

المتباينة المركبة هي : $5 < x < 19$

## الدرس 5 متباينات القيمة المطلقة

**متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| < a$ , $|g(x)| \leq a$ حيث $a \in R$**

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن(و). بصورة عامة:

$$|g(x)| \leq a \quad \Rightarrow \quad -a \leq g(x) \leq a \quad , \quad a > 0$$

$$|g(x)| < a \quad \Rightarrow \quad -a < g(x) < a \quad , \quad a > 0$$

ملاحظة

لحل متباينات القيمة المطلقة نتبع ما يأتي:

1. نجعل القيمة المطلقة في طرف ولإعداد في طرف اخر.
2. نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة ((الإعداد)).
3. نقسم طرفي المتباينة على معامل القيمة المطلقة.
4. نستخدم الملاحظات السابقة في حل المتباينات .

السؤال 1 حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

[1] $|x+6|<3$

الحل

$-3<x+6<3$

$-3-6<x<3-6$

$-9<x<-3$

$S=\{x:\ -9<x<-3\}$

[2] $|y|-5\leq 1$

الحل

$|y|\leq 1+5$

$|y|\leq 6$

$-6\leq y\leq 6$

$S=\{y:\ -6\leq y\leq 6\}$

[3] $|x+1|<5$

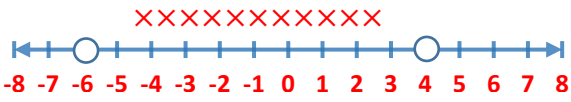
الحل

$-5<x+1<5$

$-5-1<x<5-1$

$-6<x<4$

$S=\{x:-6<x<4\}$




[4] $|3Z-7|\leq 2$

الحل

$-2\leq 3Z-7\leq 2$

$-2+7\leq 3Z\leq 2+7$

$5\leq 3Z\leq 9\ \}\div 3$

$\frac{5}{3}\leq Z\leq 3$

$S=\left\{Z:\ \frac{5}{3}\leq Z\leq 3\right\}$

[4] $|x| + 8 < 9$

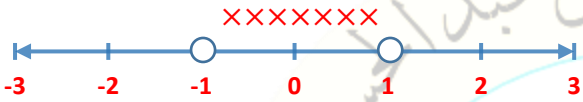
الحل

$|x| < 9 - 8$

$|x| < 1$

$-1 < x < 1$

$S = \{x : -1 < x < 1\}$




[5] $|5y| - 2 \leq 8$

الحل

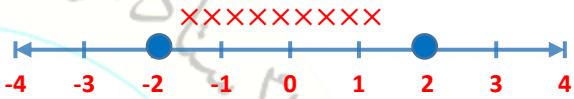
$|5y| \leq 8 + 2$

$|5y| \leq 10$

$-10 \leq 5y \leq 10 \} \div 5$

$-2 \leq y \leq 2$

$S = \{y : -2 \leq y \leq 2\}$




[6] $|5 - x| < 10$

الحل

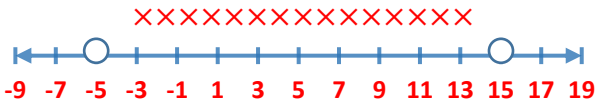
$-10 < 5 - x < 10$

$-10 - 5 < -x < 10 - 5$

$-15 < -x < 5 \quad ] \times (-1)$

$15 > x > -5$

$S = \{x : 15 > x > -5\}$




[7] $\left|\frac{x - 12}{4}\right| \leq 9$

الحل

$-9 \leq \frac{x - 12}{4} \leq 9 \quad \} \times 4$

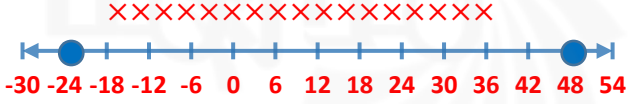
$-9(4) \leq \frac{x - 12}{4} \times 4 \leq 9(4)$

$-36 \leq x - 12 \leq 36$

$-36 + 12 \leq x \leq 36 + 12$

$-24 \leq x \leq 48$

$S = \{x : -24 \leq x \leq 48\}$



**السؤال 2** جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية:

**[1]** $|2x-5|+3<11$

**الحل**

$|2x-5|<11-3$

$|2x-5|<8$

$-8<2x-5<8$

$-8+5<2x<8+5$

$-3<2x<13\ \}\div 2$

$\frac{-3}{2}<x<\frac{13}{2}$

$S=\left\{x:\ \frac{-3}{2}<x<\frac{13}{2}\right\}$

**[2]** $|7-y|<8$

**الحل**

$-8<7-y<8$

$-8-7<-y<8-7$

$-15<-y<1\ ]\times(-1)$

$15>y>-1$

$S=\{y:\ 15>y>-1\}$

**السؤال 3** تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق $22^\circ$ سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز $2^\circ$ سيليزية . اكتب متباينة القيمة المطلقة

**الحل**

نفرض درجة الحرارة $x=$

المتباينة المركبة تكون بالصورة:

$x\geq 22-2$ و $x\leq 22+2$

$x-22\geq -2$ و $x-22\leq 2$

$|x-22|\leq 2$

**السؤال 4**

فندق بابل من الفنادق السياحية في العاصمة بغداد ويقع في منطقة الكرادة. درجة حرارة الماء المثالية في حوض السباحة 25 درجة سيليزية تزداد أو تنقص بمقدار درجة واحدة . اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل درجة حرارة الماء في الحوض ومثله بيانياً.

**الحل**

نفرض درجة حرارة الماء هي x درجة سيليزية .

$x \geq 25 - 1$ و $x \leq 25 + 1$

$x - 25 \geq -1$ و $x - 25 \leq 1$

$|x - 25| \leq 1$

رائد علي عبد الحسين

## متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| > a$ , $|g(x)| \geq a$ حيث $a \in R$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من ( أكبر من أو يساوي ) هي متباينة مركبة تتضمن(أو). بصورة عامة:

$$|g(x)| \geq a \iff g(x) \geq a \text{ أو } g(x) \leq -a \quad , \quad a > 0$$

$$|g(x)| > a \iff g(x) > a \text{ أو } g(x) < -a \quad , \quad a > 0$$

**السؤال 5** حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

[1] $|x + 4| > 2$

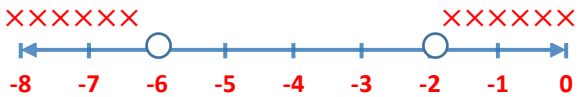
**الحل**

$x + 4 > 2$ أو $x + 4 < -2$

$x > 2 - 4$ أو $x < -2 - 4$

$x > -2$ أو $x < -6$

$S = \{x : x > -2\} \cup \{x : x < -6\}$




[2] $|x + 4| > 6$

**الحل**

$x + 4 > 6$ أو $x + 4 < -6$

$x > 6 - 4$ أو $x < -6 - 4$

$x > 2$ أو $x < -10$

$S = \{x : x > 2\} \cup \{x : x < -10\}$

[3] $|5y-1| \geq 4$

الحل

$5y-1 \geq 4$ أو $5y-1 \leq -4$

$5y \geq 4+1$ أو $5y \leq -4+1$

$5y \geq 5$ أو $5y \leq -3$ $\} \div 5$

$y \geq 1$ او $y \leq -\frac{3}{5}$

$S = \{y : y \geq 1\} \cup \left\{y : y \leq -\frac{3}{5}\right\}$

[4] $|5Z-9| > 1$

الحل

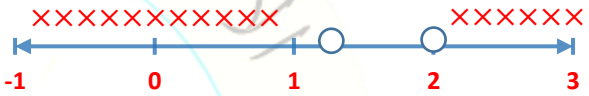
$5Z-9 > 1$ أو $5Z-9 < -1$

$5Z > 1+9$ أو $5Z < -1+9$

$5Z > 10$ أو $5Z < 8$ $\} \div 5$

$Z > 2$ أو $Z < \frac{8}{5}$

$S = \{Z : Z > 2\} \cup \left\{Z : Z < \frac{8}{5}\right\}$




[5] $|2x|+7 \geq 8$

الحل

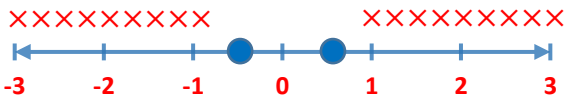
$|2x| \geq 8-7$

$|2x| \geq 1$

$2x \geq 1$ أو $2x \leq -1$ $\} \div 2$

$x \geq \frac{1}{2}$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$

$S = \left\{x : x \geq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : x \leq -\frac{1}{2}\right\}$




[6] $|4y|-2 > 3$

الحل

$|4y| > 3+2$

$|4y| > 5$

$4y > 5$ أو $4y < -5$ $\} \div 4$

$y > \frac{5}{4}$ أو $y < \frac{-5}{4}$

$S = \left\{y : y > \frac{5}{4}\right\} \cup \left\{y : y < \frac{-5}{4}\right\}$

[7] $|4Z - 14| > 2$

الحل

$4Z - 14 > 2$ أو $4Z - 14 < -2$

$4Z > 2 + 14$ أو $4Z < -2 + 14$

$4Z > 16$ أو $4Z < 12$ $\} \div 4$

$Z > 4$ أو $Z < 3$

$S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z > 4\} \cup \{Z : Z < 3\}$

[8] $\left|\frac{6 - 2y}{4}\right| \geq 9$

الحل

$\frac{6 - 2y}{4} \geq 9$ أو $\frac{6 - 2y}{4} \leq -9$ $\} \times 4$

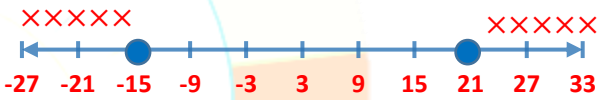
$6 - 2y \geq 36$ أو $6 - 2y \leq -36$

$-2y \geq 36 - 6$ أو $-2y \leq -36 - 6$

$-2y \geq 30$ أو $-2y \leq -42$ $\} \div (-2)$

$y \leq -15$ أو $y \geq 21$

$S = \{y : y \leq -15\} \cup \{y : y \geq 21\}$




[9] $\left|\frac{x - 12}{4}\right| \leq 9$

الحل

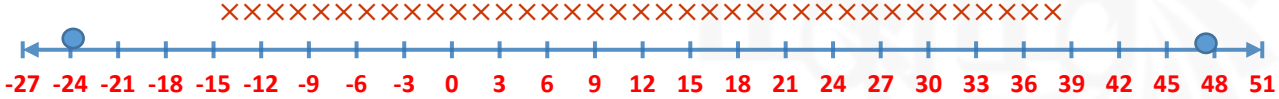
$-9 \leq \frac{x - 12}{4} \leq 9$ $\} \times 4$

$-36 \leq x - 12 \leq 36$

$-36 + 12 \leq x \leq 36 + 12$

$-24 \leq x \leq 48$

$S = \{x : -24 \leq x \leq 48\}$



**السؤال 6** جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية:

[2] $\left|\frac{5-3v}{2}\right| \geq 6$

**الحل**

$\frac{5-3v}{2} \geq 6$ أو $\frac{5-3v}{2} \leq -6$ $\}\times 2$

$5-3v \geq 12$ أو $5-3v \leq -12$

$-3v \geq 12-5$ أو $-3v \leq -12-5$

$-3v \geq 7$ أو $-3v \leq -17$ $\}\div(-3)$

$v \leq -\frac{7}{3}$ أو $v \geq \frac{17}{3}$

$S = \left\{v\, v \leq -\frac{7}{3}\right\} \cup \left\{v : v \geq \frac{17}{3}\right\}$

[1] $\left|\frac{2t-8}{4}\right| \geq 9$

**الحل**

$\frac{2t-8}{4} \geq 9$ أو $\frac{2t-8}{4} \leq -9$ $\}\times 4$

$2t-8 \geq 36$ أو $2t-8 \leq -36$

$2t \geq 36+8$ أو $2t \leq -36+8$

$2t \geq 44$ أو $2t \leq -28$ $\}\div 2$

$t \geq 22$ أو $t \leq -14$

$S = \{t : t \geq 22\} \cup \{t : t \leq -14\}$

**السؤال 7**

الزاوية القائمة تتحول الى زاوية حادة أو منفرجة إذا تحرك مؤشر الزاوية الى اليمين أو الى اليسار في الأقل درجة واحدة. اكتب متباينة القيمة المطلقة.

**الحل**

نفرض الزاوية $= x$

قياس الزاوية القائمة 90

المتباينة المركبة تكون بالصورة:

$x \geq 90+1$ أو $x \leq 90-1$

$x-90 \geq 1$ أو $x-90 \leq -1$

$|x-90| \geq 1$

**السؤال 8**

في تحليلات دم الأنسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو $(3.5 - 5.3)\ mol/L$ . اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الأنسان.

**الحل**

نفرض البوتاسيوم x

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واقل من القيمة الدنيا للمعدل هي : $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واكبر من القيمة العليا للمعدل هي : $x > 5.3$

المتباينة المركبة : $x > 5.3$ أو $x < 3.5$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم

نجد منتصف المسافة بين النقطتين : $\frac{3.5+5.3}{2} = \frac{8.8}{2} = 4.4$

نطرح نصف قطر المسافة من المتباينة:

$x > 5.3$ أو $x < 3.5$

$x - 4.4 > 5.3 - 4.4$ أو $x - 4.4 < 3.5 - 4.4$

$x - 4.4 > 0.9$ أو $x - 4.4 < -0.9$

$|x - 4.4| > 0.9$

**مسائل حياتية**

**السؤال 9**

الغرير : حيوان الغرير هو أحد أنواع الثدييات ينتمي الى شعبة الحبليات ويمتلك قوائم قصيرة نوعا ما ويعيش في الحفر التي يحفرها في الأرض طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل ما بين $68cm , 76cm$ . اكتب مدى طول الغرير.
(أكتب متباينة القيمة المطلقة)

**الحل**

نفرض طول الغرير $= x$

المتباينة $68 < x < 76$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{68+76}{2} = \frac{144}{2} = 72$ ثم نطرح (72) من جميع المتباينة :

$68 < x < 76$

$68 - 72 < x - 72 < 76 - 72$

$-4 < x - 72 < 4 \quad \Rightarrow \quad |x - 72| < 4$

السؤال 10 حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

فـــكر

i) $\left|\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\right| \le \sqrt{6}$

الحل

$$-\sqrt{6} \le \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \le \sqrt{6} \quad \} \times \sqrt{2}$$

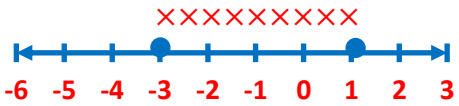
$$-\sqrt{12} \le \sqrt{3}(x+1) \le \sqrt{-12}$$

$$-2\sqrt{3} \le \sqrt{3}x + \sqrt{3} \le 2\sqrt{3}$$

$$-2\sqrt{3} - \sqrt{3} \le \sqrt{3}x \le 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$-3\sqrt{3} \le \sqrt{3}x \le \sqrt{3} \quad \} \div \sqrt{3}$$

$$-3 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -3 \le x \le 1\}$$




ii) $\left|\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}\,y}{\sqrt{5}}\right| \ge \sqrt{15}$

الحل

$$\frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \ge \sqrt{15} \quad \text{أو} \quad \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \le -\sqrt{15} \quad \} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{12} - \sqrt{3}y \ge \sqrt{75} \quad \text{أو} \quad \sqrt{12} - \sqrt{3}y \le -\sqrt{75}$$

$$2\sqrt{3} - \sqrt{3}y \ge 5\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad 2\sqrt{3} - \sqrt{3}y \le -5\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}y \ge 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad -\sqrt{3}y \le -5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}y \ge 3\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad -\sqrt{3}y \le -8\sqrt{3} \quad \} \div (-\sqrt{3})$$

$$y \le -3 \quad \text{أو} \quad y \ge 8$$

$$S = \{y : y \le -3\} \cup \{y : y \ge 8\}$$

الجزء الأول

# الرائد في الرياضيات

اعداد وترتيب

الأستاذ رائد علي عبد الحسين

07703153998

## الصف الثالث متوسط

الفصل الثاني

المقادير الجبرية

- شرح مفصل للمادة
- ملاحظات وخطوات حل لكل موضوع
- حلول أمثلة وتمارين الكتاب بشكل مبسط

2021

طريقك الى النجاح

# الفصل الثاني

# المقادير الجبرية

الدرس 1 ضرب المقادير الجبرية

الدرس 2 تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

الدرس 3 تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

الدرس 4 تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

الدرس 5 تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين

الدرس 6 تبسيط المقادير الجبرية النسبية

MATHEMATICS

متوسطة نهج البلاغة الأهلية

07703153998

الفصل الثاني | المقادير الجبرية

## الدرس 1 ضرب المقادير الجبرية

## ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

**ملاحظة (1)**

إذا كان المقدار يتكون من قوسين مختلفين فنقوم بتوزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة.

**السؤال 1** جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

[1] $(x+3)(x+5) = x^2+5x+3x+15$
$= x^2+8x+15$

[2] $(x+2)(x-6) = x^2-6x+2x-12$
$= x^2-4x-12$

[3] $(x-1)(x-4) = x^2-4x-x+4$
$= x^2-5x+4$

[4] $(x-3)(x-2) = x^2-2x-3x+6$
$= x^2-5x+6$

[5] $(v+5)(v+1) = v^2+v+5v+5$
$= v^2+6v+5$

[6] $(3x-4)(x+5)$
$= 3x^2+15x-4x-20$
$= 3x^2+11x-20$

[7] $\left(\frac{1}{3}y+3\right)\left(\frac{1}{3}y+2\right)$
$= \frac{1}{9}y^2+\frac{2}{3}y+y+6$
$= \frac{1}{9}y^2+\frac{5}{3}y+9$

[8] $(3y+1)(y+2) = 3y^2+6y+y+2$
$= 3y^2+7y+2$

$[9]\ (n-\sqrt{3})(5n-\sqrt{3}) = 5n^2 - \sqrt{3}\,n - 5\sqrt{3}n + 3$
$= 5n^2 - 6\sqrt{3}\,n + 3$

---

**السؤال 2**

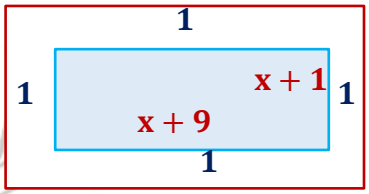
مسبح: يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد يبلغ طول المسبح فيه $(x+9)$ امتار وعرضه $(x+1)$ متر ومحاط بممر عرضه 1 متر.
اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة.

مسائل حياتية

الحل

الطول مع الممر $x + 9 + 1 + 1 = x + 11$

العرض مع الممر $x + 1 + 1 + 1 = x + 3$




مساحة المسبح = الطول × العرض

$A = (x+11)(x+3) = x^2 + 3x + 11x + 33$
$= x^2 + 14x + 33$

---

**ملاحظة (2)**

اذا كان المقدار من قوسين متشابهين ومختلفين بالإشارة أي بالصورة $(a-b)(a+b)$ فإن القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة :
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

**السؤال 3**

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

$[1](2x-7)(2x+7) = (2x)^2 - (7)^2$
$= 4x^2 - 49$

$[2]\ (v+\sqrt{2})(v-\sqrt{2}) = v^2 - (\sqrt{2})^2$
$= v^2 - 2$

$[3]\ (x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

$[4]\ (x+3)(x-3) = x^2 - 3^2$
$= x^2 - 9$

$[5]\ (Z+\sqrt{5})(Z-\sqrt{5}) = Z^2 - (\sqrt{5})^2$
$= Z^2 - 5$

**ملاحظة (3)**

اذا كان المقدار بالصورة $(a+b)^2$ أو $(a-b)^2$ فإن تبسيطه حسب قانون المربع الكامل :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(\text{الأول} \mp \text{الثاني})^2 = \text{مربع الأول} \mp 2 \times \text{الأول} \times \text{الثاني} + \text{مربع الثاني}$$

**السؤال 4**

جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

[1] $(h-5)^2 = h^2 - 10h + 25$

[2] $(Z+3)^2 = Z^2 + 6Z + 9$

[3] $(\sqrt{7}-h)^2 = 7 - 2\sqrt{7}\,h + h^2$

**السؤال 5**

فكر

جد ناتج كل مما يلي بأبسط صورة:

$(x+1)^2 - (x-2)^2$

الحل

$= x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 4x + 4)$

$= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4$

$= 6x - 3$

## ضرب مقدار جبري من حدين في آخر من ثلاثة حدود

**ملاحظة**

إذا كان المقدار يتكون من قوسين أحدهما من حدين والآخر من ثلاثة حدود هنالك طريقتين:

a) نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نطرح الحدود المتشابهة.

b) إذا كان المقدار بالصورة:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

**السؤال 6** جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

[1] $(x+2)(x^2-2x+4)$ الطريقة الأولى

$= x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8$

$= x^3 + 8$

الطريقة الثانية

$(x+2)(x^2-2x+4) = x^3 + 2^3$

$= x^3 + 8$

[2] $(y-3)(y^2+3y+9) = y^3 - 3^3$

$= y^3 - 27$

[3] $(2v+5)(4v^2-10v+25)$

$= (2v)^3 + 5^3 = 8v^3 + 125$

[4] $\left(\frac{1}{3} - Z\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}Z + Z^2\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - Z^3$

$= \frac{1}{27} - Z^3$

[5] $(y+2)(y^2-2y+4) = y^3 + 2^3$

$= y^3 + 8$

[6] $(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4})$

$= x^3 - (\sqrt[3]{2})^3$

$= x^3 - 2$

[7] $(V - \sqrt[3]{3})(V^2 + \sqrt[3]{3}\,V + \sqrt[3]{9})$

$= V^3 - (\sqrt[3]{3})^3$

$= V^3 - 3$

[8] $(2Z+4)(4Z^2-8Z+16)$

$= (2Z)^3 + 4^3$

$= 8Z^3 + 64$

[9] $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}} + V\right)\left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}} - \sqrt[3]{\frac{3}{5}}\,V + V^2\right)$

$= \left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)^3 - V^3 = \frac{3}{5} + V^3$

[10] $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}} + m\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\,m + m^2\right)$

$= \left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)^3 + m^3$

$= \frac{2}{7} + m^3$

ملاحظة

اذا كان المقدر بالشكل : $(a-b)^3$ , $(a+b)^3$ نقوم بتبسيطه بالشكل التالي :

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$

نقوم بتبسيط القوس الذي يحتوي على التربيع أولاً ثم نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نجمع الحدود المتشابهة.

**السؤال 7** جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

[1] $(y+2)^3$

$= (y+2)(y+2)^2$

$= (y+2)(y^2+4y+4)$ نوزع الأقواس

$= y^3+4y^2+4y+2y^2+8y+8$

$= y^3+6y^2+12y+8$

[2] $(Z-3)^3$

$= (Z-3)(Z-3)^2$

$= (Z-3)(Z^2-6Z+9)$ نوزع الأقواس

$= Z^3-6Z^2+9Z-3Z^2+18Z-27$

$= Z^3-9Z^2+27Z-27$

[3] $(y-5)^3$

$= (y-5)(y-5)^2$

$= (y-5)(y^2-10y+25)$ نوزع الأقواس

$= y^3-10y^2+25y-5y^2+50y-125$

$= y^3-15y^2+75y-125$

[4] $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$ نوزع الأقواس

$= x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

$= x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$

[6] $(y-4)^3$

$= (y-4)(y-4)^2$

$= (y-4)(y^2-8y+16)$ نوزع الأقواس

$= y^3-8y^2+16y-4y^2+32y-64$

$= y^3-12y^2+48y-64$

[5] $(x+5)^3$

$= (x+5)(x+5)^2$

$= (x+5)(x^2+10x+25)$ نوزع الأقواس

$= x^3+10x^2+25x+5x^2+50x+125$

$= x^3+15x^2+75x+125$

## الدرس 2 تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

**لإيجاد العامل المشترك نتبع ما يأتي:**

1) نستخرج العامل المشترك للاعداد حيث يمثل أصغر عدد في المقدار الجبري ويمكن قسمة المقدار الجبري عليه.

2) نستخرج العامل المشترك للمتغيرات بأصغر أس.

3) نفتح قوس ونقوم بقسمة كل حد في المقدار الجبري على العامل المشترك وناتج القسمة يكتب داخل القوس.

**ملاحظة:**

التحقق من صحة الحل: نقوم بتوزيع العامل المشترك على داخل القوس فاذا حصلنا على المقدار الجبري فأن التحليل صحيح وإذا لم نحصل على المقدار الجبري فأن الحل خطأ ويجب إعادة التحليل.

**السؤال 1** حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

[2] $9x^2-21x = 3x(3x-7)$

التحقق من صحة الحل:

$3x(3x-7) = 9x^2-21x$

[1] $6x^3+9x^2-18x = 3x(2x^2+3x-6)$

التحقق من صحة الحل:

$3x(2x^2+3x-6) = 6x^3+9x^2-18x$

[3] $10 - 15y + 5y^2 = 5(2 - 3y + y^2)$

التحقق من صحة الحل:

$5(2 - 3y + y^2) = 10 - 15y + 5y^2$

[4] $14Z^4 - 21Z^2 - 7Z^3$

$= 7Z^2(2Z^2 - 3 - Z)$

التحقق من صحة الحل:

$7Z^2(2Z^2 - 3 - Z) = 14Z^4 - 21Z^2 - 7Z^3$

[5] $\sqrt{12}\, y^2Z + \sqrt{2}(\sqrt{6}\, yZ^2 - \sqrt{24}\, yZ)$

$= 2\sqrt{3}\, y^2Z + \sqrt{12}\, yZ^2 - \sqrt{48}\, yZ$

$= 2\sqrt{3}\, y^2Z + 2\sqrt{3}\, yZ^2 - 4\sqrt{3}\, yZ$

$= 2\sqrt{3}\, yZ(y + Z - 2)$

التحقق من صحة الحل:

$\sqrt{3}\, yZ(y + Z - 2)$

$= 2\sqrt{3}\, y^2Z + 2\sqrt{3}\, yZ^2 - 4\sqrt{3}\, yZ$

[6] $\sqrt{8}\, t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}\, tr)$

$= 2\sqrt{2}\, t^2r + \sqrt{2}\, tr^2 - \sqrt{2}\sqrt{3}\, tr$

$= \sqrt{2}\, tr(2t + r - \sqrt{3})$

التحقق من صحة الحل:

$\sqrt{2}\, tr(2t + r - \sqrt{3})$

$= 2\sqrt{2}\, t^2r + \sqrt{2}\, tr^2 - \sqrt{2}\, tr(\sqrt{3})$

$= \sqrt{2}\, t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}\, tr)$

---

**السؤال 2** حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

[1] $5x(x + 3) - 7(x + 3) = (x + 3)(5x - 7)$

[2] $\frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{3}y^2(y - 1) = (y - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2\right)$

[3] $\sqrt{3}\, V^2(Z + 2) - \sqrt{5}\, V(Z + 2) = (Z + 2)(\sqrt{3}\, V^2 - \sqrt{5}v)$

[4] $3y(y - 4) - 5(y - 4) = (y - 4)(3y - 5)$

[5] $\frac{1}{4}(t + 5) + \frac{1}{3}t^2(t + 5) = (t + 5)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}t^2\right)$

[6] $\sqrt{2}\, n(x + 1) - \sqrt{3}\, m(x + 1) = (x + 1)(\sqrt{2}\, n - \sqrt{3}\, m)$

[7] $2x(x^2 - 3) + 7(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(2x - 7)$

السؤال 3

مسائل حياتية

الطاقة الشمسية: الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السليكون تمتص الضوء من الشمس. ما أبعاد اللوح الشمسي إذا كانت مساحة $3x(x-4)-22(x-4)$ أمتار مربعة؟

الحل

$$3x(x-4)-22(x-4)=(x-4)(3x-22)$$

ابعاد اللوح الشمسي هي : $(x-4)\ ,\ (3x-22)$

## تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع

تستعمل خاصية التجميع في التحليل إذا كان المقدار الجبري يتكون من أربعة حدود.

* نضع كل من الحدين الأول والثاني والحدين الثالث والرابع بين قوسين وتكون الإشارة بين القوسين موجبة
* نستخرج العامل المشترك من كل قوس.
* نستخدم خاصية ثنائية الحد كعامل مشترك

السؤال 4 حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع

[1] $4x^3-8x^2+5x-10=(4x^3-8x^2)+(5x-10)$ عامل مشترك

$=4x^2(x-2)+5(x-2)$ ثنائية الحد

$=(x-2)(4x^2+5)$

[2] $3y^3-6y^2+7y-14=(3y^3-6y^2)+(7y-14)$ عامل مشترك

$=3y^2(y-2)+7(y-2)$ ثنائية الحد

$=(y-2)(3y^2+7)$

[3] $21-3x+35x^2-5x^3=(21-3x)+(35x^2-5x^3)$ عامل مشترك

$=3(7-x)+5x^2(7-x)$ ثنائية الحد

$=(7-x)(3+5x^2)$

[4] $3Z^3 - \sqrt{18}\,Z^2 + Z - \sqrt{2} = (3Z^3 - 3\sqrt{2}\,Z^2) + (Z - \sqrt{2})$ عامل مشترك

$= 3Z^2(Z - \sqrt{2}) + (Z - \sqrt{2})$ ثنائية الحد

$= (Z - \sqrt{2})(3Z^2 + 1)$

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 18 |
| | 3 | 9 |
| | 3 | 3 |
| | $3\sqrt{2}$ | 1 |

[5] $2r^2k + 3k^2v - 4r^2v - 6v^2k = (2r^2k - 4r^2v) + (3k^2v - 6v^2k)$ عامل مشترك

$= 2r^2(k - 2v) + 3kv(k - 2v)$ ثنائية الحد

$= (k - 2v)(2r^2 + 3kv)$

[6] $\sqrt{2}\,h^2t + \sqrt{3}\,t^2v - \sqrt{8}\,h^2v - \sqrt{12}\,v^2t = (\sqrt{2}\,h^2t - \sqrt{8}\,h^2v) + (\sqrt{3}\,t^2v - \sqrt{12}\,v^2t)$

$= (\sqrt{2}\,h^2t - 2\sqrt{2}\,h^2v) + (\sqrt{3}\,t^2v - 2\sqrt{3}\,v^2t)$

$= \sqrt{2}\,h^2(t - 2v) + \sqrt{3}\,tv(t - 2v)$

$= (t - 2v)(\sqrt{2}\,h^2 + \sqrt{3}\,tv)$

---

فكر

**السؤال 5** حلل المقدار الآتي الى ابسط صورة:

$5x^5y + 7y^3Z - 10x^5Z - 14Z^2y^2 = (5x^5y - 10x^5Z) + (7y^3Z - 14Z^2y^2)$ عامل مشترك

$= 5x^5(y - 2Z) + 7y^2Z(y - 2z)$ ثنائية الحد

$= (y - 2Z)(5x^5 + 7y^2Z)$

# طريقة التجميع مع المعكوس

تستعمل خاصية التجميع في التحليل إذا كان المقدار الجبري يتكون من أربعة حدود.

* نضع كل من الحدين الأول والثاني والحدين الثالث والرابع بين قوسين وتكون الإشارة بين القوسين موجبة
* نستخرج العامل المشترك من كل قوس.
* نغير الإشارة بين القوسين الى سالب وعكس القوس الثاني
* نستخدم خاصية ثنائية الحد كعامل مشترك

**السؤال 6** حلل المقدار باستعمال التجميع مع المعكوس:

[1] $14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x = (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x)$ — عامل مشترك

$= 7x^2(2x - 1) + 3(1 - 2x)$ — تغير الإشارة وعكس القوس الثاني

$= 7x^2(2x - 1) - 3(2x - 1)$ — ثنائية الحد

$= (2x - 1)(7x^2 - 3)$

[2] $21y^3 - 7y^2 + 3 - 9y = (21y^3 - 7y^2) + (3 - 9y)$ — عامل مشترك

$= 7y^2(3y - 1) + 3(1 - 3y)$ — تغير الإشارة وعكس القوس الثاني

$= 7y^2(3y - 1) - 3(3y - 1)$ — ثنائية الحد

$= (3y - 1)(7y^2 - 3)$

[3] $6Z^3 - 9Z^2 + 12 - 8Z = (6Z^3 - 9Z^2) + (12 - 8Z)$ — عامل مشترك

$= 3Z^2(2Z - 3) + 4(3 - 2Z)$ — تغير الإشارة وعكس القوس الثاني

$= 3Z^2(2Z - 3) - 4(2Z - 3)$ — ثنائية الحد

$= (2Z - 3)(3Z^2 - 4)$

[4] $5t^3 - 15t^2 - 2t + 6 = (5t^3 - 15t^2) + (-2t + 6)$ عامل مشترك

$= 5t^2(t - 3) + 2(-t + 3)$ تغير الإشارة وعكس القوس الثاني

$= 5t^2(t - 3) - 2(t - 3)$ ثنائية الحد

$= (t - 3)(5t^2 - 2)$

[5] $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 5 - 10x = \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3\right) + (5 - 10x)$ عامل مشترك

$= \frac{1}{4}x^3(2x - 1) + 5(1 - 2x)$ تغير الإشارة وعكس القوس الثاني

$= \frac{1}{4}x^3(2x - 1) - 5(2x - 1)$ ثنائية الحد

$= (2x - 1)\left(\frac{1}{4}x^3 - 5\right)$

## الدرس 3 تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

### تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين

تتكون طريقة الفرق بين مربعين من قوسين أحدهما موجب والأخر سالب. أي أن:

القوس الأول = الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني = الجذر التربيعي للحد الأول − الجذر التربيعي للحد الثاني

أي أن تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين:

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$$

ملاحظة : اذا كان المقدار بالصورة $x^2 + y^2$ فأنه لا يتحلل .

ملاحظة: نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة

**السؤال 1**

جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها $x^2 - 400$ متر مربع .

**الحل**

$$x^2 - 400 = (x + 20)(x - 20)$$

طول ساحة كرة القدم : $(x + 20)$ متراً وعرضها : $(x - 20)$ متراً .

---

**السؤال 2** حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

[1] $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

[2] $36y^2 - Z^2 = (6y + Z)(6y - Z)$

[3] $49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$

[4] $36 - 4x^2 = (6 + 2x)(6 - 2x)$

[5] $2x^2 - Z^2 = (\sqrt{2}\,x + Z)(\sqrt{2}\,x - Z)$

[6] $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

[7] $12 - t^2 = (\sqrt{12} + t)(\sqrt{12} - t)$
$= (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

[8] $5h^2 - 7v^2$
$= (\sqrt{5}\,h + \sqrt{7}\,v)(\sqrt{5}\,h - \sqrt{7}\,v)$

[9] $h^2 - v^2 = (h + v)(h - v)$

[10] $8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2)$
$= 2xy(2x + y)(2x - y)$

[11] $27x^3Z - 3xZ^3 = 3xZ(9x^2 - Z^2)$
$= 3xZ(3x + Z)(3x - Z)$

[12] $9m^2 - 4n^2 = (3m + 2n)(3m - 2n)$

[13] $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

[14] $\frac{1}{16}Z^4 - \frac{1}{81}$

$= \left(\frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}Z^2 - \frac{1}{9}\right)$

$= \left(\frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{2}Z + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}Z - \frac{1}{3}\right)$

# تحليل المقدار الجبري بالمربع الكامل

هي تحليل مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل.

$$x^2 \mp 2xy + y^2 = (x \mp y)^2$$

جذر الأول — جذر الثاني

إشارة الحد الثاني

**السؤال 3** حلل كل مقدار من المقادير التالية التي على صورة مربع كامل:

[1] $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

[2] $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$

[3] $16Z^2 - 8Z + 1 = (4Z-2)^2$

[4] $9Z^2 - 6Z + 1 = (3Z-1)^2$

[5] $y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2$

[6] $4h^2 - 20h + 25 = (2h-5)^2$

[7] $v^2 + 2\sqrt{3}\,v + 3 = (v+\sqrt{3})^2$

## مسائل حياتية

**السؤال 4**

مئذنة الملوية : وتقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية وتعد احدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد فهي إحدى اثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها : $x^2 - 8x + 16$ مترا مربعا . ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟

**الحل**

$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

طول ضلع القاعدة $x - 4$

ملاحظة

يكون المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ مربعا كاملا اذا تحققت الشروط التالية :

1) يجب أن يكون أشارة الحد الأول والحد الأخير موجبة.

2) نطبق قانون الحد الوسط ( الثاني ) : $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

3) إذا كان المقدار مربعا كاملا فأن تحليله يكون:

$$ax^2 \pm bx + c = \left(\sqrt{ax^2} \pm \sqrt{c}\right)^2$$

جذر الأول — جذر الثاني

$\pm$ حسب إشارة الحد الوسط (الثاني).

حيث $ax^2$ الحد الأول ، $bx$ : الحد الوسط ( الثاني ) ، $c$ : الحد الأخير ( الثالث )

**السؤال 5** حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملا وحلله:

[1] $x^2 + 10x + 25$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(x^2)(25)}$$
$$= 2(x)(5) = 10x$$

المقدار يمثل مربع كامل.

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

[2] $y^2 + 14y + 36$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$
$$by = 2\sqrt{(y^2)(36)}$$
$$= 2(y)(6)$$
$$= 12y \neq 14y$$

المقدار ليس مربع كامل.

[3] $4 - 37V + 9V^2$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$
$$bV = 2\sqrt{(9V^2)(4)}$$
$$= 2(3V)(2)$$
$$= 12V \neq 37V$$

المقدار ليس مربع كامل.

[4] $9h^2 - 6h + 3$

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$
$$bh = 2\sqrt{(9h^2)(3)}$$
$$= 2(3h)(\sqrt{3})$$
$$= 6\sqrt{3}\,h \neq 6h$$

المقدار ليس مربع كامل.

**[5]** $16 - 14v + v^2$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$
$$= 2\sqrt{(v^2)(16)}$$
$$= 2(v)(4)$$
$$= 8v \neq 14v$$

المقدار ليس مربع كامل.

**[6]** $3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$
$$= 2\sqrt{(4t^2)(3)}$$
$$= 2(2t)(\sqrt{3})$$
$$= 4\sqrt{3}\,t$$

المقدار يمثل مربع كامل.

$$3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2 = (\sqrt{3} - 2t)^2$$

**[7]** $x^2 + 18x + 81$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$
$$= 2\sqrt{(x^2)(81)}$$
$$= 2(x)(9) = 18x$$

المقدار يمثل مربع كامل.

$$x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2$$

**[8]** $64h^2 - 48h - 9$

المقدار ليس مربع كامل لأن إشارة الحد الأخير سالبة

السؤال 6

**فكـــر**

هل المقدار الآتي يمثل مربعا كاملاً أم لا؟ معللاً اجابتك.

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$$

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$
$$bx = 2\sqrt{\left(\frac{1}{9}x^2\right)\left(\frac{1}{16}\right)}$$
$$= 2\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}x$$

المقدار مربع كامل

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2$$

# إيجاد الحد المفقود فى المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$

لإيجاد الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا نتبع ما يأتي:

[1] إذا كان الحد الوسط $(bx)$ مفقود نستخدم القانون: $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

[2] اذا كان الحد الأول $(ax^2)$ مفقود نستخدم القانون: $ax^2 = \frac{(bx)^2}{4C}$

[3] اذا كان الحد الثالث $(C)$ مفقود نستخدم القانون: $C = \frac{(bx)^2}{4(ax^2)}$

**السؤال 6** اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا وحلله :

[1] $25x^2 - \cdots\cdots + 49$

الحل

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)}$

$= 2(5x)(7) = 70x$

$25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$

[2] $3 - \cdots\cdots + 9x^2$

الحل

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(9x^2)(3)}$

$= 2(3x)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\,x$

$3 - 6\sqrt{3}\,x + 9x^2 = (\sqrt{3} - 3x)^2$

[3] $\cdots\cdots + 8x + 16$

الحل

$$ax^2 = \frac{(bx)^2}{4C}$$

$$ax^2 = \frac{(8x)^2}{4(16)}$$

$$= \frac{64x^2}{64} = x^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

[4] $\cdots\cdots + 14y + 49$

الحل

$$ax^2 = \frac{(bx)^2}{4C}$$

$$ay^2 = \frac{(14y)^2}{4(49)}$$

$$= \frac{196y^2}{196} = y^2$$

$$y^2 + 14y + 49 = (y+7)^2$$

[5] $y^2 + 14y + \cdots\cdots$

الحل

$$C = \frac{(bx)^2}{4(ax^2)}$$

$$C = \frac{(14y)^2}{4y^2}$$

$$= \frac{196y^2}{4y^2} = 49$$

$$y^2 + 14y + 49 = (y+7)^2$$

[6] $4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \cdots\cdots$

الحل

$$ax^2 = \frac{(bx)^2}{4C}$$

$$ax^2 = \frac{(2\sqrt{5}x)^2}{4(4x^2)}$$

$$= \frac{20x^2}{16x^2} = \frac{5}{4}$$

$$4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \frac{5}{4} = \left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

[7] $Z^2 + 4Z + \cdots\cdots$

الحل

$$C = \frac{(bx)^2}{4(ax^2)}$$

$$C = \frac{(4Z)^2}{4Z^2} = \frac{16Z^2}{4Z^2} = 4$$

$$Z^2 + 4Z + 4 = (Z+2)^2$$

# الدرس 4 تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

## تحليل المقدار الجبري : $x^2 + bx + c$

**طريقة حل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة:**

1) تتكون من قوسين صغيرين نضع إشارة الحد الثاني في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في القوس الثاني.
2) نحلل الحد الأول الى حاصل ضرب حدين متشابهين ووضع كل حد في بداية كل قوس.
3) نحلل الحد الأخير (الثالث) الى حاصل ضرب عددين حيث إذا كانت الإشارات متشابهة نجمع أما اذا كانت الاشارات مختلفة نطرح
4) للتأكد من صحة الحل يجب ان يكون حاصل ضرب الوسطين $\pm$ حاصل ضرب الطرفين $=$ الحد الوسط

**السؤال 1** ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمترا مربعا ؟

**الحل**

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$$

الحد الوسط: $+7x + 3x = +10x$

**السؤال 2** حلل المقادير الآتية الى أبسط صورة:

[1] $y^2 + y - 12 = (y + 4)(y - 3)$

الحد الوسط: $-3y + 4y = +y$

[2] $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$

الحد الوسط: $-6x - 3x = -9x$

[3] $y^2 + 6y - 27 = (y + 9)(y - 3)$

الحد الوسط: $-3y + 9y = +6y$

[4] $x^2 - xy - 20y^2 = (x - 5y)(x + 4y)$

الحد الوسط: $+4xy - 5xy = -xy$

[6] $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$

الحد الوسط: $+4x + 2x = +6x$

[5] $15 - 8Z + Z^2 = (5 - Z)(3 - Z)$

الحد الوسط: $-5Z - 3Z = -8Z$

[8] $x^2 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 12)$

الحد الوسط: $-12x - x = -13x$

[7] $1 - 2Z + Z^2 = (1 - Z)(1 - Z)$

الحد الوسط: $-Z - Z = -2Z$

[10] $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

الحد الوسط: $+x - 3x = -2x$

[9] $3 + 2Z - Z^2 = (1 + Z)(3 - Z)$

الحد الوسط: $-Z + 3Z = +2Z$

## تحليل المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$

**السؤال 3** حلل المقادير الآتية الى أبسط صورة:

[2] $7y^2 - 26y - 8 = (y - 4)(7y + 2)$

الحد الوسط: $+2y - 28y = -26y$

[1] $6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$

الحد الوسط: $+14x + 3x = +17x$

[4] $4v^2 - v - 3 = (v - 1)(4v + 3)$

الحد الوسط: $+3v - 4v = -v$

[3] $3Z^2 - 17Z + 10 = (3Z - 2)(Z - 5)$

الحد الوسط: $-15Z - 2Z = -17Z$

[6] $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$

الحد الوسط: $-9xy - xy = -10xy$

[5] $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$

الحد الوسط: $+5h + 6h = +11h$

[7] $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$

الحد الوسط: $+2x + 3x = +5x$

[8] $3y^2 - 14y + 8 = (3y - 2)(y - 4)$

الحد الوسط: $-12y - 2y = -14y$

[9] $3x^2 - 10x + 8 = (3x - 4)(x - 2)$

الحد الوسط: $-6x - 4x = -10x$

[10] $8 - 25Z + 3Z^2 = (8 - Z)(1 - 3Z)$

الحد الوسط: $-24Z - Z = -25Z$

[11] $5y^2 - y - 6 = (5y - 6)(y + 1)$

الحد الوسط: $+5y - 6y = -y$

[12] $6 + 29Z - 5Z^2 = (1 + 5Z)(6 - Z)$

الحد الوسط: $-Z + 30Z = +29Z$

[13] $x^2 - 9xy + 20y^2 = (x - 4y)(x - 5y)$

الحد الوسط: $-5xy - 4xy = -9xy$

[14] $3y^2 - 19yx - 14x^2$

$= (y - 7x)(3y + 2x)$

الحد الوسط: $+2xy - 21xy = -19xy$

[15] $6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21)$

$= 3(x - 7)(2x - 3)$

الحد الوسط: $-3x - 14x = -17x$

## مسائل حياتية

**السؤال 4**

قلعة الأخيضر: قلعة الأخيضر هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمة الى يومنا هذا الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل. ما أبعاد هذا السور الذي يحيط بالقلعة التي مساحتها $6x^2 - 39x + 60$ مترا مربعا ؟

**الحل**

$6x^2 - 39x + 60 = 3(2x^2 - 13x + 20)$

$= 3(2x - 5)(x - 4)$

أبعاد السور هو : $(x - 4)$ , $(2x - 5)$

السؤال 5 حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة:

فكـــر

$4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = (4x^3 + 4x^2) + (-9x - 9)$ عامل مشترك

$= 4x^2(x + 1) - 9(x + 1)$ ثنائية الحد

$= (x + 1)(4x^2 - 9)$ فرق بين مربعين

$= (x + 1)(2x + 3)(2x - 3)$

---

# الدرس 5 تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين

## تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 = 1^3$ | $8 = 2^3$ | $27 = 3^3$ | $64 = 4^3$ | $125 = 5^3$ | $216 = 6^3$ |

السؤال 1 حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة:

[1] $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

[2] $y^3 + 8 = y^3 + 2^3$
$= (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

[3] $8Z^3 + 27 = 2^3Z^3 + 3^3$
$= (2Z + 3)(4Z^2 - 6Z + 9)$

[4] $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3}$
$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

[5] $y^3 + 216 = y^3 + 6^3$
$= (y + 6)(y^2 - 6y + 36)$

[6] $125 + 8Z^3 = 5^3 + 2^3Z^3$
$= (5 + 2Z)(25 - 10Z + 4Z^2)$

[7] $\frac{1}{27}x^3+\frac{1}{8}=\frac{1}{3^3}x^3+\frac{1}{2^3}$

$=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}\right)$

[8] $\frac{27}{x^3}+\frac{8}{125}=\frac{3^3}{x^3}+\frac{2^3}{5^3}$

$=\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2}-\frac{6}{5x}+\frac{4}{25}\right)$

[9] $\frac{1}{3}t^3+9=\frac{1}{3}(t^3+27)$

$=\frac{1}{3}(t^3+3^3)$

$=\frac{1}{3}(t+3)(t^2-3t+9)$

[10] $\frac{1}{2}t^3+4=\frac{1}{2}(t^3+8)$

$=\frac{1}{2}(t^3+2^3)$

$=\frac{1}{2}(t+2)(t^2-2t+4)$

[11] $x^3+Z^3=(x+Z)(x^2-xZ+Z^2)$

[12] $1+0.008Z^3$

$=1^3+(0.2)^3Z^3$

$=(1+0.2Z)(1-0.2Z+0.04Z^2)$

[13] $1+0.008Z^3$

$=1^3+(0.2)^3Z^3$

$=(1+0.2Z)(1+0.2Z+0.04Z^2)$

[14] $0.125+v^3$

$=(0.5)^3+v^3$

$=(0.5+v)(0.25-0.5v+v^2)$

# تحليل المقدار الجبري فرق بين مكعبين

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 = 1^3$ | $8 = 2^3$ | $27 = 3^3$ | $64 = 4^3$ | $125 = 5^3$ | $216 = 6^3$ |

**السؤال 2** حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة:

[1] $x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

[2] $a^3 - 8^3 = (a - 8)(a^2 + 8a + 64)$

[3] $y^3 - 64 = y^3 - 4^3$
$= (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

[4] $27Z^3 - 8 = 3^3Z^3 - 2^3$
$= (3Z - 2)(9Z^3 + 6Z + 4)$

[5] $8y^3 - 64 = 2^3y^3 - 4^3$
$= (2y - 4)(4y^2 + 8y + 16)$

[6] $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3}$
$= \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$

[7] $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{c^3} - \frac{1}{2^3}$
$= \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{4}\right)$

[5] $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27)$
$= \frac{1}{3}(t^3 - 3^3)$
$= \frac{1}{3}(t - 3)(t^2 + 3t + 9)$

[8] $32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3)$
$= \frac{1}{2}(4^3 - m^3)$
$= \frac{1}{2}(4 - m)(16 + 4m + m^2)$

[9] $\frac{1}{2}v^3 - 4 = \frac{1}{2}(v^3 - 8)$

$= \frac{1}{2}(v^3 - 2^3)$

$= \frac{1}{2}(v - 2)(v^2 + 2v + 4)$

[10] $25 - \frac{1}{5}n^3 = \frac{1}{5}(125 - n^3)$

$= \frac{1}{5}(5^3 - n^3)$

$= \frac{1}{5}(5 - n)(25 + 5n + n^2)$

[11] $3b^3 - 81 = 3(b^3 - 27)$

$= 3(b^3 - 3^3)$

$= 3(b - 3)(b^2 + 3b + 9)$

[12] $0.216 - n^3$

$= (0.6)^3 - n^3$

$= (0.6 - n)(0.36 + 0.6n + n^2)$

[13] $1 - 0.125Z^3$

$= 1^3 - (0.5)^3Z^3$

$= (1 - 0.5Z)(1 + 0.5Z + 0.25Z^2)$

[14] $0.125 - m^3$

$= (0.5)^3 - m^3$

$= (0.5 - m)(0.25 + 0.5m + m^2)$

[15] $0.216v^3 - 0.008t^3$

$= (0.6)^3v^3 - (0.2)^3t^3$

$= (0.6v - 0.2t)(0.36v^2 + 0.12vt + 0.04t^2)$

السؤال 3 | مسائل حياتية

مكتبة: مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في المانيا كما أنها من أكثر المكتبات تماشيا مع متطلبات التعليم الحديثة. بناية المكتبة على شكل مكعب طول ضلعه $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر. حلل المقدار الذي يمثل طول الضلع.

الحل

$$\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{27}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(y^3 - 27)$$
$$= \frac{1}{2}(y^3 - 3^3)$$
$$= \frac{1}{2}(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$$

السؤال 4 | فكـــر

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية الى أبسط صورة

$$0.002Z^3 - 0.016y^3$$
$$= 0.002(Z^3 - 8y^3)$$
$$= 0.002(Z^3 - (2)^3y^3)$$
$$= 0.002(Z - 2y)(Z^2 + 2Zy + 4y^2)$$

## الدرس 5 تبسيط المقادير الجبرية النسبية

### تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها

خطوات الحل

1) نحلل كل حدودية بطرق التحليل السابقة للبسط والمقام.
2) اذا وجدت علامة القسمة (÷) نحول القسمة الى ضرب (×) وقلب الكسر الثاني .
3) نختصر الحدود المتشابهة بين البسط والمقام.
4) نضرب البسط في البسط والمقام في المقام

**السؤال 1** أكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة:

[1] $\frac{y^2-4}{y^2-4y+4}$

$=\frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)(y-2)}$

$=\frac{y+2}{y-2}$

[2] $\frac{y^3+27}{y^3-3y^2+9y}$

$=\frac{(y+3)(y^2-3y+9)}{y(y^2-3y+9)}$

$=\frac{y+3}{7}$

[3] $\frac{2Z^2-4Z+2}{Z^2-7Z+6}$

$=\frac{2(Z^2-2Z+1)}{(Z-6)(Z-1)}$

$=\frac{2(Z-1)(Z-1)}{(Z-6)(Z-1)}$

$=\frac{2(Z-1)}{(Z-6)}$

[4] $\frac{5Z+10}{Z-3}\times\frac{Z^3-27}{Z^2+6Z+8}$

$=\frac{5(Z+2)}{Z-3}\times\frac{(Z-3)(Z^2+3Z+9)}{(Z+2)(Z+4)}$

$=\frac{5(Z^2+3Z+9)}{Z+4}$

[5] $\frac{16-x^2}{3x+5}\times\frac{3x^2+2x-5}{x^2+3x-4}$

$=\frac{(4+x)(4-x)}{3x+5}\times\frac{(3x+5)(x-1)}{(x+4)(x-1)}$

$=4-x$

[6] $\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{x^2+5x+6}{25x^2-9}$

$=\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{(x+3)(x+2)}{(5x+3)(5x-3)}$

$=\frac{x+2}{5x-3}$

[7] $\frac{Z^2+7Z-8}{Z-1}\times\frac{Z^2-4}{Z^2+6Z-16}$

$=\frac{(Z+8)(Z-1)}{Z-1}\times\frac{(Z+2)(Z-2)}{(Z+8)(Z-2)}$

$=Z+2$

[8] $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$

$=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-2)}\times\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)}$

$=\frac{x+3}{x-2}$

[9] $\dfrac{8+t^3}{4-2t+t^2} \div \dfrac{(2+t)^3}{t^2+9t+14}$

$= \dfrac{8+t^3}{4-2t+t^2} \times \dfrac{t^2+9t+14}{(2+t)^3}$

$= \dfrac{(2+t)(4-2t+t^2)}{4-2t+t^2} \times \dfrac{(t+7)(t+2)}{(2+t)(2+t)(2+t)}$

$= \dfrac{t+7}{2+t}$

[10] $\dfrac{2y^2-2y}{y^2-9} \div \dfrac{y^2+y-2}{y^2+2y-3}$

$= \dfrac{2y^2-2y}{y^2-9} \times \dfrac{y^2+2y-3}{y^2+y-2}$

$= \dfrac{2y(y-1)}{(y+3)(y-3)} \times \dfrac{(y+3)(y-1)}{(y+2)(y-1)}$

$= \dfrac{2y(y-1)}{(y-3)(y+2)}$

**السؤال 2**

اشترى حسن مجموعة من باقات الزهور بمبلغ $x^2-x-6$ دينار فكانت كلفة باقة الزهور الواحدة عليه $2x-6$ دينار . اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة الى الثمن الكلي لباقات الزهور وبأبسط صورة.

**الحل**

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x-6}{x^2-x-6}$$

$$= \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

**مسائل حياتية**

**السؤال 3**

اذا كان المقدار الجبري $x^2-4$ يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة والمقدار الجبري $x^2+x-6$ يمثل عدد الكتب الأدبية فيها . اكتب نسبة الكتب العلمية الى الكتب الأدبية بأبسط صورة.

**الحل**

$$\frac{\text{عدد الكتب العلمية}}{\text{عدد الكتب الأدبية}} = \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x+3}$$

السؤال 4

فكـــر

بسط كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

$$\frac{y^2-5}{2y^3-16} \div \frac{y-\sqrt{5}}{2y^2+4y+8} = \frac{y^2-5}{2y^3-16} \times \frac{2y^2+4y+8}{y-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})}{2(y^3-8)} \times \frac{2(y^2+2y+4)}{y-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{y+\sqrt{5}}{(y-2)(y^2+2y+4)} \times \frac{y^2+4y+4}{1}$$

$$= \frac{y+\sqrt{5}}{y-2}$$

## تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

خطوات الحل

1) نحلل البسط والمقام بأحدي طرق التحليل السابقة ونختصر العوامل المتشابهة بين بسط ومقام نفس الحدودية.

2) نلاحظ المقامات إذا كانت متشابهة نجري عملية الجمع أو الطرح للبسط وبأخذ احدى المقامات.

3) إذا كانت المقامات مختلفة (غير متشابهة) نوحدها ذلك بأخذ المضاعف المشترك الأصغر للمقامات وبدون تكرار واستخراج البسط الجديد

السؤال 5 اكتب كل مقدار من المقادير الأتية بأبسط صورة:

[1] $\frac{y^2}{y+2}-\frac{4}{y+2}$

$=\frac{y^2-4}{y+2}$

$=\frac{(y+2)(y-2)}{y+2}$

$=y-2$

[2] $\frac{7x-14}{x^2-4}+\frac{5}{x+2}$

$=\frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{5}{x+2}$

$=\frac{7}{x+2}+\frac{5}{x+2}$

$=\frac{7+5}{x+2}=\frac{12}{x+2}$

[3] $\frac{4Z}{2Z-5}-\frac{Z}{Z+3}$

$=\frac{4Z(Z+3)-Z(2Z-5)}{(2Z-5)(Z+3)}$

$=\frac{4Z^2+12Z-2Z^2+5Z}{(2Z-5)(Z+3)}$

$=\frac{2Z^2+17Z}{(2Z-5)(Z+3)}$

$=\frac{Z(2Z+17)}{(2Z-5)(Z+3)}$

[4] $\frac{t^2+2t+4}{t^3-8}+\frac{12}{3t-6}$

$=\frac{t^2+2t+4}{(t-2)(t^2+2t+4)}+\frac{4\ 12}{3(t-2)}$

$=\frac{1}{t-2}+\frac{4}{t-2}$

$=\frac{5}{t-2}$

[5] $\frac{8}{v+4}+\frac{2}{v-4}-\frac{1}{v^2-16}$

$$=\frac{8}{v+4}+\frac{2}{v-4}-\frac{1}{(v+4)(v-4)}$$

$$=\frac{8(v-4)+2(v+4)-1}{(v+4)(v-4)}$$

$$=\frac{8v-32+2v+8-1}{(v+4)(v-4)}$$

$$=\frac{10v-25}{(v+4)(v-4)}$$

$$=\frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$$

[6] $\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{2}{(x+3)(x-3)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{2(x-1)+3(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{2x-2+3x+9}{(x+3)(x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{5x+7}{(x+3)(x-3)(x-1)}$$

[7] $\frac{2y^3-128}{y^3+4y^2+16y}-\frac{y-1}{y}$

$$=\frac{2(y^3-64)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}$$

$$=\frac{2(y-4)(y^2+4y+16)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}$$

$$=\frac{2(y-4)-(y-1)}{y}$$

$$=\frac{2y-8-y+1}{y}=\frac{y-7}{y}$$

[8] $\frac{Z^2+Z+1}{Z^4-Z}-\frac{Z+3}{Z^2+2Z-3}$

$$=\frac{Z^2+Z+1}{Z(Z^3-1)}-\frac{Z+3}{(Z+3)(Z-1)}$$

$$=\frac{Z^2+Z+1}{Z(Z-1)(Z^2+Z+1)}-\frac{1}{(Z-1)}$$

$$=\frac{1}{Z(Z-1)}-\frac{1}{(Z-1)}$$

$$=\frac{1-Z}{Z(Z-1)}$$

$$=\frac{-(Z-1)}{Z(Z-1)}=\frac{-1}{Z}$$

[9] $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}-1$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}-1$

$=\dfrac{x+1}{x-1}-1$

$=\dfrac{x+1-(x-1)}{x-1}$

$=\dfrac{x+1-x+1}{x-1}$

$=\dfrac{2}{x-1}$

[10] $\dfrac{3}{Z-1}+\dfrac{2}{Z+3}+\dfrac{8}{Z^2+2Z-3}$

$=\dfrac{3}{Z-1}+\dfrac{2}{Z+3}+\dfrac{8}{(Z+3)(Z-1)}$

$=\dfrac{3(Z+3)+2(Z-1)+8}{(Z-1)(Z+3)}$

$=\dfrac{3Z+9+2Z-2+8}{(Z-1)(Z+3)}$

$=\dfrac{5Z+15}{(Z-1)(Z+3)}$

$=\dfrac{5(Z+3)}{(Z-1)(Z+3)}$

$=\dfrac{5}{Z-1}$

[11] $\dfrac{y-3}{y-1}+\dfrac{5y-15}{(y-3)^2}-\dfrac{3y+1}{y^2-4y+3}$

$=\dfrac{y-3}{y-1}+\dfrac{5(y-3)}{(y-3)(y-3)}-\dfrac{3y+1}{(y-1)(y-3)}$

نفتح الاقواس

$=\dfrac{(y-3)(y-3)+5(y-1)-(3y+1)}{(y-1)(y-3)}$

$=\dfrac{y^2-3y-3y+9+5y-5-3y-1}{(y-1)(y-3)}$

$=\dfrac{y^2-4y+3}{(y-1)(y-3)}$

$=\dfrac{(y-1)(y-3)}{(y-1)(y-3)}=1$

الجزء الأول

# الرائد في الرياضيات

اعداد وترتيب

الأستاذ رائد علي عبد الحسين

07703153998

الصف الثالث متوسط

الفصل الثالث

المعادلات

- شرح مفصل للمادة
- ملاحظات وخطوات حل لكل موضوع
- حلول أمثلة وتمارين الكتاب بشكل مبسط

2021

طريقك الى النجاح

# الفصل الثالث

# المعادلات

الدرس 1 حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

الدرس 2 حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

الدرس 3 حل المعادلات التربيعية بالتجربة

الدرس 4 حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

الدرس 5 حل المعادلات التربيعية بالقانون العام

الدرس 6 حل المعادلات الكسرية

MATHEMATICS

متوسطة نهج البلاغة الأهلية

07703153998

الفصل الثالث | المعادلات

# الدرس 1 حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

## حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيا

ليكن $L_1 : a_1x + b_1y = c_1$ , $L_2 : a_2x + b_2y = c_2$ معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين $x , y$ لحل هذا النظام بيانيا نتبع ما يأتي :

[1] تمثيل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي.

[2] لإيجاد احداثي نقطة تقاطع المستقيمين يرسم عمودان من النقطة على المحور الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل

**السؤال 1**

جد مجموعة حل النظام بيانيا في R $\quad x - y = 1 \ \cdots\cdots (1)$ , $x + y = 3 \ \cdots\cdots (2)$

**الحل**

رمز للمعادلة (1) : $x - y = 1$ بالرمز $L_1$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | −1 | (0, −1) |
| 1 | 0 | (1, 0) |

$0 - y = 1 \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow y = -1$

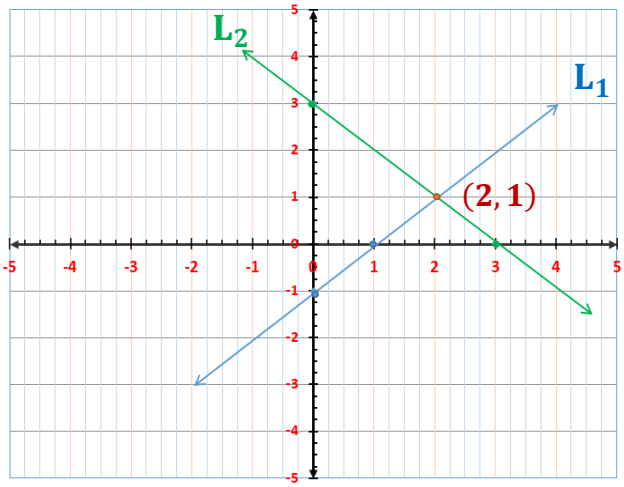
$x - 0 = 1 \Rightarrow x = 1$

نرمز للمعادلة (2) : $x + y = 3$ بالرمز $L_2$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | 3 | (0, 3) |
| 3 | 0 | (3, 0) |

$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3$

$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$



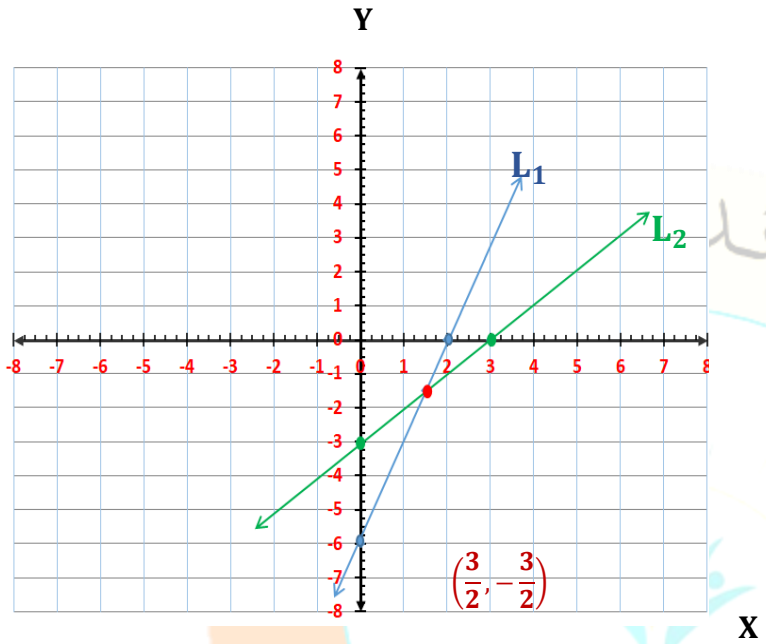

مجموعة الحل هي : $S = [(2, 1)]$

**السؤال 2** جد مجموعة حل للنظام في R بيانياً :

[1] $3x - y = 6$ ..... (1)

$x - y = 3$ ..... (2)

**الحل**




نرمز للمعادلة (1) : $3x - y = 3$ بالرمز $L_1$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | −6 | (0, −6) |
| 2 | 0 | (2, 0) |

$3(0) - y = 6 \Rightarrow -y = 6 \Rightarrow y = -6$

$3x - 0 = 6 \Rightarrow 3x = 6 \} \div 3 \Rightarrow x = 2$

نرمز للمعادلة (2) $x - y = 3$ بالرمز $L_2$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | −3 | (0, −3) |
| 3 | 0 | (3, 0) |

$0 - y = 3 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$

$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$

مجموعة حل النظام : $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$

[2] $y - x = 3$ ..... (1)

$y + x = 0$ ..... (2)

الحل

نرمز للمعادلة (1) : $y - x = 3$ بالرمز $L_1$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | 3 | (0, 3) |
| −3 | 0 | (−3, 0) |

$y - 0 = 3 \Rightarrow y = 3$

$0 - x = 3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$

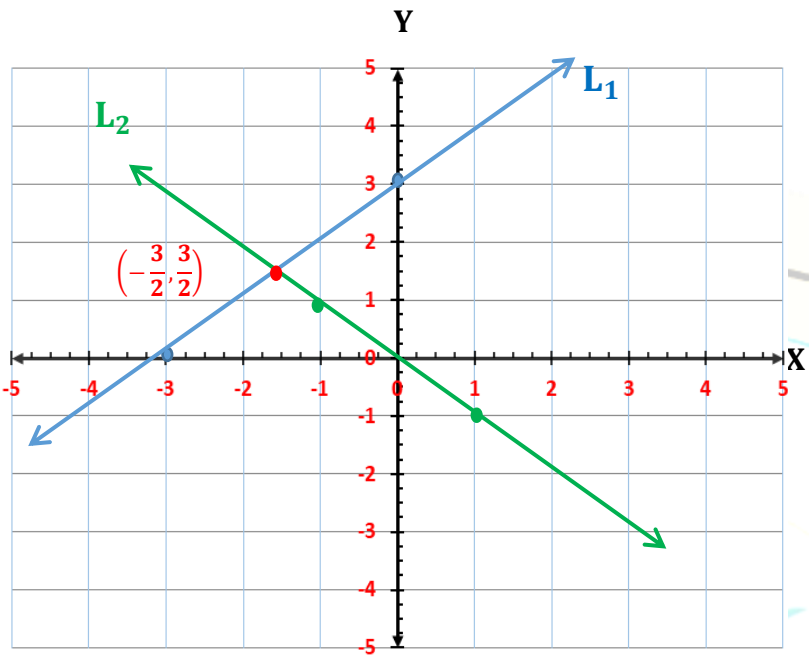
نرمز للمعادلة (2) : $y + x = 3$ بالرمز $L_2$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 1 | −1 | (1, −1) |
| −1 | 1 | (−1, 1) |

$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

مجموعة حل النظام : $\{(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})\}$



[3] $y = x - 2$ ..... (1)

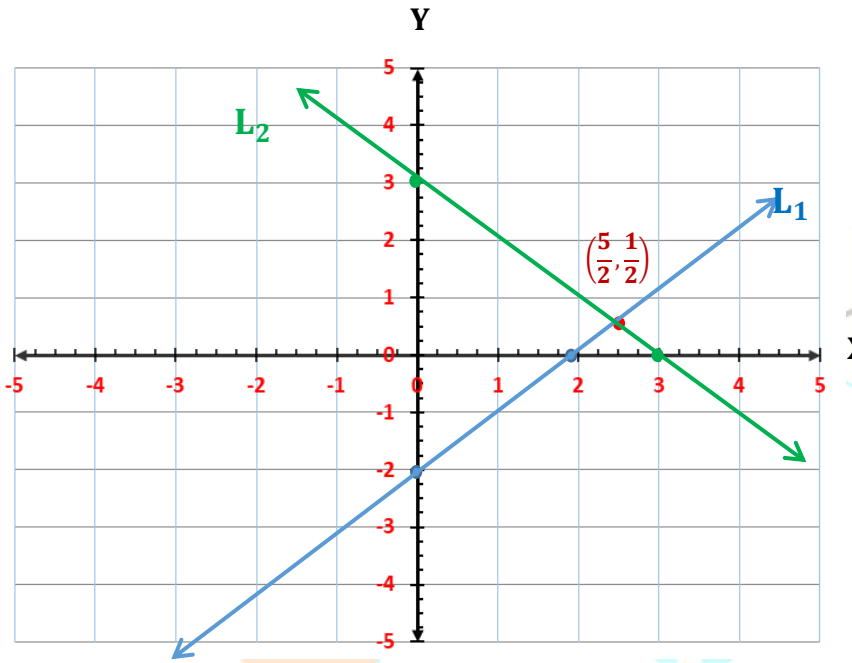
$y = 3 - x$ ..... (2)

الحل

نرمز للمعادلة (1) : $y = x - 2$ بالرمز $L_1$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | −2 | (0, −2) |
| 2 | 0 | (2, 0) |

$y = 0 - 2 \Rightarrow y = -2$
$0 = x - 2 \Rightarrow x = 2$




نرمز للمعادلة (2) $y = 3 - x$ بالرمز $L_2$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | 3 | (0, 3) |
| 3 | 0 | (3, 0) |

$y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3$
$0 = 3 - x \Rightarrow x = 3$

مجموعة حل النظام : $\{(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})\}$

# حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين بتحويل أحدى المعادلتين الى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بإيجاد علاقة بين X, Y من أحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى

**السؤال 3** جد مجموعة حل للمعادلتين في R باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي :

$[2]\ x + 8y = 10 \quad \cdots\cdots (1)$

$x - 4y = 2 \quad \cdots\cdots (2)$

**الحل**

من معادلة (2) نحصل على :

$x = 2 + 4y \quad \cdots\cdots (3)$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2 + 4y + 8y = 10$

$2 + 12y = 10$

$12y = 10 - 2$

$12y = 8 \} \div 12$

$y = \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{2}{3}$

نعوض عن قيمة $y = \frac{2}{3}$ في معادلة (3)

$x = 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{8}{3}$

$= \frac{6+8}{3} = \frac{14}{3}$

$S = \left\{\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

$[1]\ y = 4x \quad \cdots\cdots (1)$

$y = x + 6 \quad \cdots\cdots (2)$

**الحل**

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$4x = x + 6$

$4x - x = 6$

$2x = 6\} \div 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة (2)

$y = 2 + 6 \quad \Rightarrow \quad y = 8$

$S = \{(2, 8)\}$

[4] $x - 2y = 11$ ..... (1)

$2x - 3y = 18$ ..... (2)

**الحل**

من معادلة (1) نحصل على :

$x = 11 + 2y$ ..... (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$2(11 + 2y) - 3y = 18$

$22 + 4y - 3y = 18$

$22 + y = 18$

$y = 18 - 22 \Rightarrow y = -4$

نعوض قيمة $y = -4$ في معادلة (3)

$x = 11 + 2(-4)$

$= 11 - 8 \Rightarrow x = 3$

$S = \{(3, -4)\}$

[3] $2x + 3y = 1$ ..... (1)

$3x - 2y = 0$ ..... (2)

**الحل**

من معادلة (2) نحصل على :

$3x = 2y \} \div 3$

$x = \frac{2}{3}y$ ..... (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2\left(\frac{2}{3}y\right) + 3y = 1$

$\frac{4}{3}y + 3y = 1 \} \times 3$

$4y + 9y = 3$

$13y = 3 \} \div 13 \Rightarrow y = \frac{3}{13}$

نعوض قيمة $y = \frac{3}{13}$ في معادلة (3)

$x = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{2}{13}$

$S = \left\{\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)\right\}$

[5] $y - 5x = 10$ ..... (1)

$y - 3x = 8$ ..... (2)

**الحل**

من معادلة (1) نحصل على :

$y = 10 + 5x$ ..... (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$10 + 5x - 3x = 8$

$10 + 2x = 8$

$2x = 8 - 10$

$2x = -2 \} \div 2 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

نعوض قيمة $x = -1$ في معادلة (3)

$y = 10 + 5(-1)$

$= 10 - 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5$

$S = \{(-1, 5)\}$

## حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف

تتلخص هذه الطريقة لحل النظام من معادلتين بحذف أحد المتغيرين وذلك بجعل معامل أحدهما متساويا بالقيمة ومختلفا بالإشارة في كلا المعادلتين.

**السؤال 4** جد مجموعة حل للنظام في R باستعمال الحذف .

$[2]\ 3x + 4y = 10 \quad \cdots\cdots (1) \quad \} \times 3$

$2x + 3y = 7 \quad \cdots\cdots (2) \quad \} \times 4$

**الحل**

$9x + 12y = 30 \quad \cdots\cdots (1)$

بالطرح $\mp 8x \mp 12y = \mp 28 \quad \cdots\cdots (2)$

$x = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة $(2)$

$2(2) + 3y = 7$

$4 + 3y = 7$

$3y = 7 - 4$

$3y = 3 \} \div 3 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

$S = \{(2, 1)\}$

$[1]\ x + 2y = 5 \quad \cdots\cdots (1)$

$3x - y = 1 \quad \cdots\cdots (2) \quad \} \times 2$

**الحل**

نضرب معادلة $(2)$ في العدد 2

$x + 2y = 5 \quad \cdots\cdots (1)$

بالجمع $6x - 2y = 2 \quad \cdots\cdots (2)$

$7x = 7 \} \div 7 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

نعوض قيمة $x = 1$ في معادلة $(1)$

$1 + 2y = 5$

$2y = 5 - 1$

$2y = 4 \} \div 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

مجموعة حل النظام : $S = \{(1, 2)\}$

[4] $x - 3y = 6$ ..... (1) $\times 2$

$2x - 4y = 24$ ..... (2)

الحل

$\mp 2x \pm 6y = \mp 12$ ..... (1)

$2x - 4y = 24$ ..... (2) بالطرح

$2y = 12 \div 2 \Rightarrow y = 6$

نعوض قيمة $y = 6$ في معادلة (1)

$x - 3(6) = 6$

$x - 18 = 6$

$x = 6 + 18 \Rightarrow x = 24$

$S = \{(24, 6)\}$

[3] $3x - 4y = 12$ ..... (1)

$5x + 2y = -6$ ..... (2) $\times 2$

الحل

$3x - 4y = 12$ ..... (1)

$10x + 4y = -12$ ..... (2) بالجمع

$13x = 0 \div 13 \Rightarrow x = 0$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$5(0) + 2y = -6$

$2y = -6 \div 2 \Rightarrow y = -3$

$S = \{(0, -3)\}$

[5] $3x = 22 - 4y$ ..... (1)

$4y = 3x - 14$ ..... (2)

الحل

$3x + 4y = 22$ ..... (1)

$-3x + 4y = -14$ ..... (2) بالجمع

$8y = 8 \div 8 \Rightarrow y = 1$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$3x = 22 - 4(1)$

$3x = 22 - 4$

$3x = 18 \div 3 \Rightarrow x = 6$

$S = \{(6, 1)\}$

**السؤال 5** جد مجموعة الحل للمعادلتين في R وتحقق من صحة الحل :

$$[2]\ 0.2x - 6y = 4 \quad \cdots\cdots (1)$$
$$0.1x - 7y = -2 \quad \cdots\cdots (2) \quad \} \times 2$$

**الحل**

$$0.2x - 6y = 4 \quad \cdots\cdots (1)$$

بالطرح

$$\mp 0.2x \pm 14y = \pm 4 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$8y = 8 \ \} \div 8 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة $(1)$

$$0.2x - 6(1) = 4$$
$$0.2x - 6 = 4$$
$$0.2x = 4 + 6$$
$$0.2x = 10 \ \} \div 0.2$$
$$x = \frac{10}{0.2} = \frac{100}{2} = 50$$

مجموعة حل النظام : $\{(50, 1)\}$

تحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x = 50 , y = 1$ في معادلة $(1)$

$$LHS = 0.2x - 6y$$
$$= 0.2(50) - 6(1)$$
$$= 10 - 6 = 4 \quad = RHS$$

$$[2]\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \quad \cdots\cdots (1) \quad \} \times 6$$
$$\frac{3y}{3} - \frac{x}{3} = 4 \quad \cdots\cdots (2) \quad \} \times 3$$

**الحل**

$$4x - 3y = 6 \quad \cdots\cdots (1)$$
$$3y - x = 12$$
$$-x + 3y = 12 \quad \cdots\cdots (2)$$

بالجمع

$$4x - 3y = 6 \quad \cdots\cdots (1)$$
$$3x = 18 \ \} \div 3 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

نعوض قيمة $x = 6$ في معادلة $(2)$

$$-6 + 3y = 12$$
$$3y = 12 + 6$$
$$3y = 18 \ \} \div 3 \quad \Rightarrow \quad y = 6$$

$$S = \{(6, 6)\}$$

تحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x = 6 , y = 6$ في أحدى المعادلتين لتكن معادلة $(2)$

$$LHS = -x + 3y$$
$$= -6 + 3(6)$$
$$= -6 + 18 = 12 \quad = RHS$$

[3] $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=2\frac{3}{4}$ ..... (1)

$\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=6\frac{1}{4}$ ..... (2)

**الحل**

بسط معادلة (1)

$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=\frac{11}{4}\ \}\times 12$

$6x+8y=33$ ..... (1)

نبسط معادلة (2)

$\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=\frac{25}{4}\ \}\times 12$

$3x-8y=75$ ..... (2)

$6x+8y=33$ ..... (1) بالجمع

$9x=108\ \}\div 9 \Rightarrow x=12$

نعوض قيمة $x=12$ في معادلة (1)

$6(12)+8y=33$

$72+8y=33$

$8y=33-72$

$8y=-39\ \}\div 8 \Rightarrow y=\frac{-39}{8}$

$S=\left\{\left(12,-\frac{39}{8}\right)\right\}$

تحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x=12\ ,y=-\frac{39}{8}$ في معادلة (1)

$LHS=6x+8y$

$=6(12)+8\left(-\frac{39}{8}\right)$

$=72-39=33 \quad =RHS$

**مسائل حياتية**

**السؤال 6**

طقس :تقل عدد الأيام $(x)$ التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد أيام $(y)$ التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية .
اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف ثم جد حلهما بطريقة الحذف.

**الحل**

عدد أيام شهر كانون الثاني $= 31$ يوم

نفرض عدد الأيام التي تنخفض بها درجة الحرارة $= x$

نفرض عدد الأيام التي تزداد بها درجة الحرارة $= y$

$y + x = 31 \quad \cdots\cdots (1)$

$y - x = 9 \quad \cdots\cdots (2)$ بالجمع

$2y = 40 \ \} \div 2 \Rightarrow y = 20$

نعوض قيمة $y = 20$ في معادلة $(1)$

$20 + x = 31$

$x = 31 - 20 \Rightarrow x = 11$

$S = \{(11, 20)\}$

**فكـر**

**السؤال 7**

جد مجموعة الحل للمعادلتين في R

$\frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1 \quad \cdots\cdots (1) \ \} \times 6$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3 \quad \cdots\cdots (2) \ \} \times 2$

**الحل**

$2x - 2y = 6 \quad \cdots\cdots (1)$

$x + y = 6 \quad \cdots\cdots (2) \ \} \times 2$

$2x + 2y = 12 \quad \cdots\cdots (2)$

$2x - 2y = 6 \quad \cdots\cdots (1)$ بالجمع

$4x = 18 \ \} \div 4$

$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

نعوض قيمة $x = \frac{9}{2}$ في معادلة $(2)$

$\frac{9}{2} + y = 6$

$y = 6 - \frac{9}{2}$

$= \frac{12 - 9}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

# الدرس 2 حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

## حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

**خطوات الحل**

[1] نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة.

[2] نجعل المعادلة بالصورة : $x^2 - a^2 = 0$

[3] نحل المعادلة بطريقة الفرق بين مربعين بالصورة : $(x + a)(x - a) = 0$

[4] نجد قيم x بجعل:

$x + a = 0 \implies x = -a$ أما

$x - a = 0 \implies x = a$ أو

[5] نكتب مجموعة الحل : $S = \{-a, a\}$

**السؤال 1** حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

[1] $4x^2 - 25 = 0$

الحل

$(2x + 5)(2x - 5) = 0$

أما $2x + 5 = 0$

$2x = -5 \} \div 2 \implies x = \frac{-5}{2}$

أو $2x - 5 = 0$

$2x = 5 \} \div 2 \implies x = \frac{5}{2}$

$S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

[2] $3Z^2 - 12 = 0$

الحل

$3Z^2 - 12 = 0 \} \div 3$

$Z^2 - 4 = 0$

$(Z + 2)(Z - 2) = 0$

أما $Z + 2 = 0 \implies Z = -2$

أو $Z - 2 = 0 \implies Z = 2$

$S = \{-2, 2\}$

[3] $x^2 - 5 = 0$

الحل

$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$

أما $x + \sqrt{5} = 0 \implies x = -\sqrt{5}$

أو $x - \sqrt{5} = 0 \implies x = \sqrt{5}$

$S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

[4] $2y^2 - 6 = 0$

الحل

$2y^2 - 6 = 0 \ \} \div 2$

$y^2 - 3 = 0$

$(y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) = 0$

أما $y + \sqrt{3} = 0 \implies y = -\sqrt{3}$

أو $y - \sqrt{3} = 0 \implies y = \sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

[5] $(Z + 1)^2 - 36 = 0$

الحل

$(Z + 1 + 6)(Z + 1 - 6) = 0$

$(Z + 7)(Z - 5) = 0$

أما $Z + 7 = 0 \implies Z = -7$

أو $Z - 5 = 0 \implies Z = 5$

$S = \{-7, 5\}$

[6] $4x^2 - 9 = 0$

الحل

$(2x + 3)(2x - 3) = 0$

أما $2x + 3 = 0$

$2x = -3 \ \} \div 2 \implies x = \frac{-3}{2}$

أو $2x - 3 = 0$

$2x = 3 \ \} \div 2 \implies x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

[7] $5y^2 - 20 = 0$

الحل

$5y^2 - 20 = 0 \ \} \div 5$

$y^2 - 4 = 0$

$(y + 2)(y - 2) = 0$

أما $y + 2 = 0 \implies y = -2$

أو $y - 2 = 0 \implies y = 2$

$S = \{-2, 2\}$

[8] $(y + 2)^2 - 49 = 0$

الحل

$(y + 2 + 7)(y + 2 - 7) = 0$

$(y + 9)(y - 5) = 0$

أما $y + 9 = 0 \implies y = -9$

أو $y - 5 = 0 \implies y = 5$

$S = \{-9, 5\}$

[9] $(3 - Z)^2 - 1 = 0$

الحل

$(3 - Z + 1)(3 - Z - 1) = 0$

$(4 - Z)(2 - Z) = 0$

أما $4 - Z = 0 \implies Z = 4$

أو $2 - Z = 0 \implies Z = 2$

$S = \{4, 2\}$

[10] $x^2 - 3 = 0$

الحل

$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

أما $x + \sqrt{3} = 0 \implies x = -\sqrt{3}$

أو $x - \sqrt{3} = 0 \implies x = \sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

[11] $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

الحل

$\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0$

أما $y + \frac{1}{3} = 0 \quad y = -\frac{1}{3}$

أو $y + \frac{1}{3} = 0 \quad y = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

**السؤال 2** حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل :

**[2]** $x^2 - 16 = 0$

**الحل**

$(x + 4)(x - 4) = 0$

أما $x + 4 = 0 \implies x = -4$

أو $x - 4 = 0 \implies x = 4$

$S = \{-4, 4\}$

تحقق من صحة الحل:

نعوض قيم x في المعادلة :

عندما $x = 4$

$LHS = x^2 - 16 = (4)^2 - 16$

$= 16 - 16 = 0 = RHS$

عندما $x = -4$

$LHS = x^2 - 16 = (-4)^2 - 16$

$= 16 - 16 = 0 = RHS$

**[1]** $16 - y^2 = 0$

**الحل**

$(4 + y)(4 - y) = 0$

أما $4 + y = 0 \implies y = -4$

أو $4 - y = 0 \implies y = 4$

$S = \{4, -4\}$

تحقق من صحة الحل:

نعوض قيم y في المعادلة

عندما $y = 4$

$LHS = 16 - y^2 = 16 - (4)^2$

$= 16 - 16 = 0 = RHS$

عندما $y = -4$

$LHS = 16 - y^2 = 16 - (-4)^2$

$= 16 - 16 = 0 = RHS$

[4] $2Z^2 - 8 = 0$

الحل

$2Z^2 - 8 = 0 \} \div 2$

$Z^2 - 4 = 0 \implies$

$(Z + 2)(Z - 2) = 0$

أما $Z + 2 = 0 \implies Z = -2$

أو $Z - 2 = 0 \implies Z = 2$

$S = \{-2, 2\}$

تحقق من صحة الحل:

نعوض قيم Z في المعادلة :

عندما $Z = 2$

$LHS = 2Z^2 - 8 = 2(2)^2 - 8$

$= 8 - 8 = 0 \quad = RHS$

عندما $Z = -2$

$LHS = 2Z^2 - 8 = 2(-2)^2 - 8$

$= 8 - 8 = 0 \quad = RHS$

[3] $81 - y^2 = 0$

الحل

$(9 + y)(9 - y) = 0$

أما $9 + y = 0 \implies y = -9$

أو $9 - y = 0 \implies y = 9$

$S = \{-9, 9\}$

تحقق من صحة الحل:

نعوض قيم y في المعادلة

عندما $y = 9$

$LHS = 81 - y^2 = 81 - (9)^2$

$= 81 - 81 = 0 \quad = RHS$

عندما $y = -9$

$LHS = 81 - y^2 = 81 - (-9)^2$

$= 81 - 81 = 0 \quad = RHS$

**السؤال 3** حل المعادلات التالية في R

**فكـــر**

i) $9(x^2+1)=34$

**الحل**

$9x^2+9-34=0$

$9x^2-25=0$

$(3x+5)(3x-5)=0$

أما $3x+5=0$

$3x=-5 \;\}\div 3 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$

أو $3x-5=0$

$3x=5 \;\}\div 3 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$S=\left\{-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right\}$

ii) $4x^2-3=0$

**الحل**

$(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})=0$

أما $2x+\sqrt{3}=0$

$2x=-\sqrt{3} \;\}\div 2 \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

أو $2x-\sqrt{3}=0$

$2x=\sqrt{3} \;\}\div 2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

**السؤال 4**

تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق اذ أنها تقع في جنوب العراق. رسم باسل لوحة جدارية للزقورة مربعة الشكل مساحتها $9m^2$ على جدار إسمنتي . أكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة.

**الحل**

نفرض طول ضلع اللوحة x

مساحة اللوحة = طول الضلع × نفسه

$x^2=9$

$x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

أما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ يهمل

أو $x-3=0 \Rightarrow x=3$

طول ضلع اللوحة هو : 3m

# حل المعادلات بخاصية الجذر التربيعي

## خطوات الحل

[1] نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة.

[2] نجعل المتغيرات التي تحتوي $x^2$ في طرف والأعداد في طرف اخر .

[3] نقسم الطرفين على معامل $x^2$ أي جعل المعدلة بالصورة : $x^2 = a$

[4] نأخذ الجذر التربيعي للطرفين واضعين اشارتي $(\mp)$ أمام العدد . أي أن : $x = \mp\sqrt{a}$

[5] نكتب مجموعة الحل : $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$

**السؤال 1** حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[1] $y^2 = 36$

الحل

$y = \pm\sqrt{3} \implies y = \pm 6$

$S = \{6, -6\}$

[2] $Z^2 = \frac{9}{25}$

الحل

$Z = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \implies Z = \pm\frac{3}{5}$

$S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$

[3] $x^2 + 81 = 0$

$x^2 = -81$ لا يوجد جذر تربيعي للعدد السالب

[4] $3y^2 = 7$

الحل

$3y^2 = 7 \} \div 3 \implies y^2 = \frac{7}{3}$

$y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \implies y = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$

[5] $4x^2 - 5 = 0$

الحل

$4x^2 = 5 \} \div 4 \implies x^2 = \frac{5}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \implies x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

[6] $x^2 = 64$

الحل

$x = \pm\sqrt{64} \implies x = \pm 8$

$S = \{8, -8\}$

[7] $2y^2 = \frac{49}{8}$

الوسطين × الطرفين

الحل

$16y^2 = 49 \} \div 16$

$y^2 = \frac{49}{16} \implies y = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$

$y = \pm\frac{7}{4} \implies S = \left\{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\right\}$

[8] $Z^2 = 7$

$Z = \pm\sqrt{7} \implies S = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$

[9] $6Z^2 - 5 = 0$

الحل

$6Z^2 = 5 \} \div 6 \implies Z^2 = \frac{5}{6}$

$Z = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} \implies Z = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right\}$

[10] $4(x^2 - 12) = 13$

الحل

$4x^2 - 48 = 13$

$4x^2 = 13 + 48$

$4x^2 = 61 \} \div 4$

$x^2 = \frac{61}{4} \implies x = \pm\sqrt{\frac{61}{4}}$

$x = \pm\frac{\sqrt{61}}{2}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{61}}{2}, -\frac{\sqrt{61}}{2}\right\}$

[11] $Z^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

الحل

$Z^2 = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

$Z^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \implies Z^2 = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}$

$Z = \pm\sqrt{\frac{1}{6}} \implies Z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

**السؤال 2**

حل المعادلة التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل : $x^2 = 9$

**الحل**

$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{3, -3\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

عندما $x = 3$

$LHS = x^2 = (3)^2 = 9 \quad = RHS$

عندما $x = -3$

$LHS = x^2 = (-3)^2 = 9 \quad = RHS$

**السؤال 3** — **مسائل حياتية**

موكيت سجاد : قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها 12m وعرضها 3m قطعت الى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل . ما طول ضلع الغرفة.

**الحل**

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 12 \times 3 = 36\ m^2$

نفرض طول ضلع المربع $= x$

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

$A = x^2$

مساحة المستطيل = مساحة المربع

$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 6$

أما $x = 6$ أو $x = -6$ يهمل

طول ضلع الغرفة 6m

**ملاحظة**

إذا كانت المعادلة تحتوي على جذر نتبع ما يأتي:

[1] نجعل الحد الذي يحتوي على الجذر $(\sqrt{x})$ في طرف والأعداد في طرف اخر .

[2] نقسم طرفي المعادلة على معامل المتغير الذي يحتوي على الجذر $(\sqrt{x})$ أي :

نجعل المعادلة بالصورة : $\sqrt{x} = a$

[3] نقوم بتربيع طرفي المعادلة. أي أن : $(\sqrt{x})^2 = a^2$

[4] نكتب مجموعة الحل.

**السؤال 4** حل المعادلات التالية في R :

**[1]** $3\sqrt{x} = 18$

**الحل**

$3\sqrt{x} = 18 \ \} \div 3$

$\sqrt{x} = 6$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (6)^2$

$x = 36 \implies S = \{36\}$

**[2]** $3\sqrt{x} = 15$

**الحل**

$3\sqrt{x} = 15 \ \} \div 3$

$\sqrt{x} = 5$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (5)^2$

$x = 25 \implies S = \{25\}$

**[3]** $\sqrt{y+8} = 3$

**الحل**

$\sqrt{y+8} = 3$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{y+8})^2 = (3)^2$

$y + 8 = 9$

$y = 9 - 8 = 1 \implies S = \{1\}$

**[4]** $\sqrt{y-5} = 2$

**الحل**

$\sqrt{y-5} = 2$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{y-5})^2 = (2)^2$

$y - 5 = 4$

$y = 4 + 5 = 9 \implies S = \{9\}$

**[5]** $\sqrt{5Z} = 7$

**الحل**

$\sqrt{5Z} = 7$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{5Z})^2 = (7)^2$

$5Z = 49 \ \} \div 5$

$Z = \frac{49}{5} \implies S = \left\{\frac{49}{5}\right\}$

**[6]** $\sqrt{2Z} = 6$

**الحل**

$\sqrt{2Z} = 6$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{2Z})^2 = (6)^2$

$2Z = 36 \ \} \div 2$

$Z = 18 \implies S = \{18\}$

[7] $\sqrt{\frac{x}{13}} = 1$ بتربيع الطرفين

$$\left(\sqrt{\frac{x}{13}}\right)^2 = (1)^2$$

$$\frac{x}{13} = 1$$

$$x = 13 \implies S = \{13\}$$

## الدرس 3 حل المعادلات التربيعية بالتجربة

تحليل المقدار الى قوسين بإشارتين مختلفتين أو متشابهتين بحسب إشارة الحد المطلق (الثالث) والحد الوسط (الثاني)

حل المعادلة : $x^2 + bx + c = 0$

**السؤال 1** حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $x^2 - 7x + 12 = 0$

الحل

$(x-4)(x-3) = 0$

أما $x - 4 = 0 \implies x = 4$

أو $x - 3 = 0 \implies x = 3$

$S = \{4, 3\}$

[2] $y^2 + 8y + 15 = 0$

الحل

$(y+5)(y+3) = 0$

أما $y + 5 = 0 \implies y = -5$

أو $y + 3 = 0 \implies y = -3$

$S = \{-5, -3\}$

[4] $x^2 - 2x - 63 = 0$

الحل

$(x - 9)(x + 7) = 0$

أما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

أو $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

$S = \{9, -7\}$

[3] $Z^2 - Z - 30 = 0$

الحل

$(Z - 6)(Z + 5) = 0$

أما $Z - 6 = 0 \Rightarrow Z = 6$

أو $Z + 5 = 0 \Rightarrow Z = -5$

$S = \{6, -5\}$

[6] $x^2 - 4x - 32 = 0$

الحل

$(x - 8)(x + 4) = 0$

أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

$S = \{8, -4\}$

[5] $x^2 - 9x + 18 = 0$

الحل

$(x - 6)(x - 3) = 0$

أما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$S = \{6, 3\}$

[8] $y^2 + 9y - 36 = 0$

الحل

$(y + 12)(y - 3) = 0$

أما $y + 12 = 0 \Rightarrow y = -12$

أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

$S = \{3, -12\}$

[7] $y^2 + 48y - 49 = 0$

الحل

$(y + 49)(y - 1) = 0$

أما $y + 49 = 0 \Rightarrow y = -49$

أو $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$S = \{1, -49\}$

[9] $x^2 - 3x + 2 = 0$

الحل

$(x-2)(x-1) = 0$

أما $x - 2 = 0 \implies x = 2$

أو $x - 1 = 0 \implies x = 1$

$S = \{1, 2\}$

[10] $y^2 - 8y - 33 = 0$

الحل

$(y-11)(y+3) = 0$

أما $y - 11 = 0 \implies y = 11$

أو $y - 3 = 0 \implies y = 3$

$S = \{11, -3\}$

## حل المعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$

السؤال 2 حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $4y^2 - 14y + 6 = 0$

الحل

$4y^2 - 14y + 6 = 0 \ \} \div 2$

$2y^2 - 7y + 3 = 0$

$(2y-1)(y-3) = 0$

أما $2y - 1 = 0$

$2y = 1 \ \} \div 2 \implies y = \frac{1}{2}$

أو $y - 3 = 0 \implies y = 3$

$S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

[2] $3x^2 + 18x - 21 = 0$

الحل

$3x^2 + 18x - 21 = 0 \ \} \div 3$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$(x+7)(x-1) = 0$

أما $x + 7 = 0 \implies x = -7$

أو $x - 1 = 0 \implies x = 1$

$S = \{-7, 2\}$

[4] $9x^2 - 69x - 24 = 0$

الحل

$9x^2 - 69x - 24 = 0 \} \div 3$

$3x^2 - 23x - 8 = 0$

$(x - 8)(3x + 1) = 0$

أما $x - 8 = 0 \implies x = 8$

أو $3x + 1 = 0$

$3x = -1 \} \div 3 \implies x = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{8, -\frac{1}{3}\right\}$

[3] $20 + 13Z + 2Z^2 = 0$

الحل

$(4 + Z)(5 + 2Z) = 0$

أما $4 + Z = 0 \implies Z = -4$

أو $5 + 2Z = 0$

$2Z = -5 \} \div 2 \implies Z = -\frac{5}{2}$

$S = \left\{-4, -\frac{5}{2}\right\}$

[6] $6 + 7x - 5x^2 = 0$

الحل

$(3 + 5x)(2 - x) = 0$

أما $3 + 5x = 0$

$5x = -3 \} \div 5 \implies x = -\frac{3}{5}$

أو $2 - x = 0 \implies x = 2$

$S = \left\{2, -\frac{3}{5}\right\}$

[5] $15x^2 - 11x - 14 = 0$

الحل

$(5x - 7)(3x + 2) = 0$

أما $5x - 7 = 0$

$5x = 7 \} \div 5 \implies x = \frac{7}{5}$

أو $3x + 2 = 0$

$3x = -2 \} \div 3 \implies x = -\frac{2}{3}$

$S = \left\{\frac{7}{5}, -\frac{2}{3}\right\}$

[7] $42 + 64y + 24y^2 = 0$

الحل

$42 + 64y + 24y^2 = 0 \quad \} \div 2$

$21 + 32y + 12y^2 = 0$

$(3 + 2y)(7 + 6y) = 0$

أما $3 + 2y = 0$

$2y = -3 \} \div 2 \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}$

أو $7 + 6y = 0$

$6y = -7 \} \div 6 \Rightarrow \quad y = -\frac{7}{6}$

$S = \left\{-\frac{7}{6}, -\frac{3}{2}\right\}$

[8] $36 - 75x + 6x^2 = 0$

الحل

$36 - 75x + 6x^2 = 0 \quad \} \div 3$

$12 - 25x + 2x^2 = 0$

$(12 - x)(1 - 2x) = 0$

أما $12 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 12$

أو $1 - 2x = 0$

$2x = 1 \} \div 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{12, \frac{1}{2}\right\}$

السؤال 3

ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12 ؟

الحل

نفرض العدد $= x$

مربع العدد $= x^2$

$x^2 - x = 12$

$x^2 - x - 12 = 0$ التجربة

$(x - 4)(x + 3) = 0$

أما $x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

أو $x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3$

$S = \{4, -3\}$

[9] $70 - 33y - 4y^2 = 0$

الحل

$(7 - 4y)(10 + y) = 0$

أما $7 - 4y = 0$

$4y = 7 \} \div 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{7}{4}$

أو $10 + y = 0 \Rightarrow \quad y = -10$

$S = \left\{-10, \frac{7}{4}\right\}$

**السؤال 4**

**ما العد الذي مربعه يزيد عن ضعفه بمقدار 35 ؟**

**الحل**

نفرض العدد هو $x$

مربع العدد $= x^2$

ضعف العدد $= 2x$

$x^2 - 2x = 35$

التجربة $x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x-7)(x+5) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

$S = \{7, -5\}$

**السؤال 5**

**اذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار 2m على ضعف عرضه ومساحته $480m^2$ . فما بعدي الملعب؟**

**الحل**

نفرض عرض الملعب $= x$

طول الملعب $2x + 2$

مساحة الملعب = الطول × العرض

$x(2x+2) = 480$

$2x^2 + 2x - 480 = 0 \ \} \div 2$

التجربة $x^2 + x - 240 = 0$

$(x+16)(x-15) = 0$

أما $x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$ يهمل

أو $x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15m$ العرض

الطول $2x + 2 = 2(15) + 2$

$= 30 + 2 = 32m$

**السؤال 6**

**ما العدد الذي لو أضيف 4 أمثاله الى مربعه لكان الناتج 45 ؟**

**الحل**

نفرض العدد هو $x$

مربع العدد $= x^2$

أربعة اضعاف العدد $= 4x$

$x^2 + 4x = 45$

التجربة $x^2 + 4x - 45 = 0$

$(x+9)(x-5) = 0$

أما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

أو $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

$S = \{5, -9\}$

**السؤال 7**

مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار $1m$ فاذا كانت مساحة المسبح $140m^2$ جد أبعاده ؟

**الحل**

نفرض عرض المسبح $= x$

طول المسبح $= 3x - 1$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$x(3x-1) = 140$

التجربة $3x^2 - x - 140 = 0$

$(x-7)(3x+20) = 0$

العرض أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7m$

أو $3x + 20 = 0$

$3x = -20 \} \div 3$

يهمل $x = -\frac{20}{3}$

الطول $3x - 1 = 3(7) - 1$

$= 21 - 1 = 20m$

**السؤال 8**

سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$ ومساحتها $48m^2$ . ما أبعاد السجادة؟

**الحل**

نفرض عرض السجادة $= x$

طول السجادة $= x + 2$

مساحة السجادة = الطول × العرض

$x(x+2) = 48$

التجربة $x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x+8)(x-6) = 0$

أما $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$ يهمل

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ العرض

الطول $x + 2 = 6 + 2 = 8m$

**السؤال 9**

أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار $4m$ على عرضها . ما بعدا الأرض اذا كانت مساحتها $60m^2$ ؟

**الحل**

نفرض العرض $= x$

الطول $= x + 4$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x+4) = 60$

$x^2 + 4x - 60 = 0$ التجربة

$(x+10)(x-6) = 0$

أما $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$ يهمل

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ العرض

$x + 4 = 6 + 4 = 10m$ الطول

**السؤال 10** | **مسائل حياتية**

اذا كان طول صورة ملعب كرة القدم بمقدار $4m$ على ضعف عرضها فما بعدا الصورة اذا كانت مساحتها $160m^2$ ؟

**الحل**

نفرض عرض الصورة $= x$

ضعف العرض $= 2x$

طول الصورة $= 2x + 4$

المساحة = الطول × العرض

$x(2x+4) = 160$

$2x^2 + 4x - 160 = 0 \} \div 2$

$x^2 + 2x - 80 = 0$ التجربة

$(x+10)(x-8) = 0$

أما $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$ يهمل

أو $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8m$ العرض

$2x + 4 = 2(8) + 4$

$= 16 + 4 = 20m$ الطول

السؤال 11 حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

فكـــر

i) $(x-3)(x+2)=14$

الحل

$x^2+2x-3x-6-14=0$

$x^2-x-20=0$ التجربة

$(x-5)(x+4)=0$

أما $x-5=0 \Rightarrow x=5$

أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

$S=\{5,-4\}$

ii) $3y^2-11y+10=80$

الحل

$3y^2-11y+10-80=0$

$3y^2-11y-70=0$ التجربة

$(y-7)(3y+10)=0$

أما $y-7=0 \Rightarrow y=7$

أو $3y+10=0$

$3y=-10 \} \div 3 \Rightarrow y=-\frac{10}{3}$

$S=\left\{7,-\frac{10}{3}\right\}$

## الدرس 4 حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

تعرفت سابقا كيفية تحليل مقدار جبري على هيئة مربع كامل والآن سوف نستخدم هذا التحليل في حل معادلات بالتحليل بالمربع الكامل لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة. أي أن:

$$ax^2 \pm bx + c = \left(\sqrt{ax^2} \pm \sqrt{c}\right)^2$$

جذر الحد الأول ← ، → جذر الحد الثالث

↓ حيث الإشارة $\pm$ حسب إشارة الحد الوسط ( الثاني ).

**السؤال 1** حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

**[1]** $4x^2 + 20x + 25 = 0$

**الحل**

$(2x + 5)^2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي

$2x + 5 = 0$

$2x = -5 \} \div 2 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

**[2]** $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$

**الحل**

$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي

$y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

**[3]** $3 - 6\sqrt{3}Z + 9Z^2 = 0$

**الحل**

$\left(\sqrt{3} - 3Z\right)^2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي

$\sqrt{3} - 3Z = 0$

$3Z = \sqrt{3} \} \div 3 \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**[4]** $x^2 + 12x + 36 = 0$

**الحل**

$(x + 6)^2 = 0$

$x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

**[5]** $y^2 - 10y + 25 = 0$

**الحل**

$(y - 5)^2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي

$y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

**[6]** $4x^2 - 4x + 1 = 0$

**الحل**

$(2x - 1)^2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي

$2x - 1 = 0$

$2x = 1 \} \div 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

**[7]** $y^2 + 2\sqrt{7}\,y + 7 = 0$

**الحل**

$\left(y + \sqrt{7}\right)^2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي

$y + \sqrt{7} = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{7}$

**[8]** $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$

**الحل**

$\left(\frac{1}{4} - x\right)^2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي

$\frac{1}{4} - x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

**مسائل حياتية**

**السؤال 2**

مدينة بابل: مدينة بابل هي مدينة عراقية كانت تقع على نهر الفرات وكانت عاصمة البابليين أيام حكم حمورابي سنة $(1750 - 1792)$ قبل الميلاد. اذا كانت المعادلة $x^2 - 28x + 196 = 0$ تمثل مساحة أحدى القاعات المربعة الشكل اذ x يمثل طول ضلع القاعة . جد طول ضلع القاعة؟

**الحل**

$x^2 - 28x + 196 = 0$

بأخذ الجذر التربيعي $(x - 14)^2 = 0$

$x - 14 = 0$

طول ضلع القاعة $x = 14$

**السؤال 3**

الجكوار هو أحد السنوريات الكبرى المنتمية لجنس النمور تمثل المعادلة : $x^2 - 20x + 100 = 0$ مساحة المنطقة المربعة له بالمتر المربع في حديقة الحيوانات . ما المقدار الذي يمثله طول ضلع المنطقة المربعة؟

**الحل**

$x^2 - 20x + 100 = 0$

بأخذ الجذر التربيعي $(x - 10)^2 = 0$

$x - 10 = 0 \implies x = 10$

طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر هو : $10m$

[9] $x^2 + 16x = -64$

**الحل**

$x^2 + 16x + 64 = 0$

بأخذ الجذر التربيعي $(x + 8)^2 = 0$

$x + 8 = 0 \implies x = -8$

## حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

**خطوات الحل**

يمكن حل المعادلة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ بالمربع الكامل كالآتي :

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ حيث $a \neq 0$
2) اذا كان $a \neq 1$ فنقسم المعادلة على a
3) نضيف الى طرفي المعادلة المقدار ( مربع نصف معامل x ) أي أن : $\left(\frac{1}{2}\ b\right)^2$
4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعا كاملا ونبسط الطرف الأيمن.
5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x

السؤال 4 حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع:

[1] $x^2 - 4x - 12 = 0$

الحل

$x^2 - 4x = 12$

$\left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{4}^{2}\right)^2 = (2)^4 = 4$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 4x + 4 = 12 + 4$

$(x-2)^2 = 16$ بأخذ الجذر التربيعي

$x - 2 = \pm 4$

أما $x - 2 = 4$

$x = 4 + 2 \Rightarrow x = 6$

أو $x - 2 = -4$

$x = -4 + 2 \Rightarrow x = -2$

$S = \{6, -2\}$

[2] $2y^2 - 3 = 3y$

الحل

$2y^2 - 3y = 3 \quad \} \div 2$

$y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$

$\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{24+9}{16}$

$\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$ بأخذ الجذر التربيعي

$y - \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

أما $y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4}$

$y = \frac{\sqrt{33}}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}+3}{4}$

أو $y - \frac{3}{4} = \frac{-\sqrt{33}}{4}$

$y = \frac{-\sqrt{33}}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{33}+3}{4}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{33}+3}{4}, \frac{-\sqrt{33}+3}{4}\right\}$

[4] $y^2 - 3 = 2y$

الحل

$y^2 - 2y = 3$

$\left(\frac{1}{2} \times \cancel{2}\right)^2 = (1)^2 = 1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - 2y + 1 = 3 + 1$

$(y-1)^2 = 4$ بأخذ الجذر التربيعي

$y - 1 = \pm 2$

أما $y - 1 = 2$

$y = 2 + 1 \Rightarrow y = 3$

أو $y - 1 = -2$

$y = -2 + 1 \Rightarrow y = -1$

$S = \{3, -1\}$

[3] $x^2 - 10x - 24 = 0$

الحل

$x^2 - 10x = 24$

$\left(\frac{1}{2} \times \cancel{10}^{5}\right)^2 = (5)^2 = 25$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 10x + 25 = 24 + 25$

$(x-5)^2 = 49$ بأخذ الجذر التربيعي

$x - 5 = \pm 7$

أما $x - 5 = 7$

$x = 7 + 5 \Rightarrow x = 12$

أو $x - 5 = -7$

$x = -7 + 5 \Rightarrow x = -2$

$S = \{12, -5\}$

[6] $3y^2 + 2y = 1$

الحل

$3y^2 + 2y = 1 \quad \} \div 3$

$y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3+1}{9}$

$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ بأخذ الجذر التربيعي

$y - \frac{1}{3} = \pm\frac{2}{3}$

أما $y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} \implies y = 1$

أو $y - \frac{1}{3} = \frac{-2}{3}$

$y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \implies y = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$

[5] $4x^2 - 3x - 16 = 0$

الحل

$4x^2 - 3x = 16 \quad \} \div 4$

$x^2 - \frac{3}{4}x = 4$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = 4 + \frac{9}{64}$

$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{265}{64}$ بأخذ الجذر التربيعي

$x - \frac{3}{8} = \pm\frac{\sqrt{265}}{8}$

أما $x - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{265}}{8}$

$x = \frac{\sqrt{265}}{8} + \frac{3}{8} \implies x = \frac{\sqrt{265}+3}{8}$

أو $x - \frac{3}{8} = \frac{-\sqrt{265}}{8}$

$x = \frac{-\sqrt{265}}{8} + \frac{3}{8} \implies x = \frac{-\sqrt{265}+3}{8}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{265}+3}{8}, \frac{-\sqrt{265}+3}{8}\right\}$

[8] $5y^2 + 15y - 30 = 0$

الحل

$5y^2 + 15y = 30 \quad \} \div 5$

$y^2 + 3y = 6$

$\left(\frac{1}{2} \times 3\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 6 + \frac{9}{4}$

$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي

$y + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

أما $y - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{33}}{2}$

$y = \frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$

أو $y - \frac{3}{2} = \frac{-\sqrt{33}}{2}$

$y = \frac{-\sqrt{33}}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{33} - 3}{2}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{33} - 3}{2}, \frac{-\sqrt{33} - 3}{2}\right\}$

[7] $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$

الحل

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{1}{5} + \frac{9}{25}$

$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{5 + 9}{25}$

$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$ بأخذ الجذر التربيعي

$x - \frac{3}{5} = \pm\frac{\sqrt{14}}{5}$

أما $x - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{14}}{5}$

$x = \frac{\sqrt{14}}{5} + \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{14} + 3}{5}$

أو $x - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{14}}{5}$

$x = \frac{-\sqrt{14}}{5} + \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{14} + 3}{5}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{14} + 3}{5}, \frac{-\sqrt{14} + 3}{5}\right\}$

السؤال 5 حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح : فكـــر

i) $4x(x-6)=27$

الحل

$4x^2-24x=27 \quad \} \div 4$

$x^2-6x=\frac{27}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\times 6\right)^2=(3)^2=9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-6x+9=\frac{27}{4}+9$

$(x-3)^2=\frac{27+36}{4}$

$(x-3)^2=\frac{63}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي

$x-3\approx\pm\frac{8}{4}$

$x-3\approx\pm 2$

أما $x-3\approx 2$

$x\approx 2+3 \Rightarrow x\approx 5$

أو $x-3\approx -2$

$x\approx -2+3 \Rightarrow x\approx 1$

$S=\{5,1\}$

ii) $6y^2-48y=6$

الحل

$6y^2-48y=6 \quad \} \div 6$

$y^2-8y=1$

$\left(\frac{1}{2}\times 8\right)^2=(4)^2=16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-8y+16=1+16$

$(y-4)^2=17$ بأخذ الجذر التربيعي

$y-4\approx\pm 4$

أما $x-4\approx 4$

$x\approx 4+4 \Rightarrow x\approx 8$

أو $x-4\approx -4$

$x\approx -4+4 \Rightarrow x\approx 0$

$S=\{8,0\}$

**السؤال 6**

مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار $2cm$ قدر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح اذا كانت مساحته $36cm^2$ ؟

**الحل**

نفرض عرض المستطيل $= x$

طول المستطيل $= x + 2$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$x(x+2) = 36$$

$$x^2 + 2x = 36$$

نضيف الى طرفي المعادلة $\left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 = (1)^2 = 1$

$$x^2 + 2x + 1 = 36 + 1$$

$$(x+1)^2 = 37$$

بأخذ الجذر التربيعي $x + 1 = \pm\sqrt{37}$

$$x + 1 \approx \pm 6$$

أما $x + 1 \approx 6$

العرض $x \approx 6 - 1 \Rightarrow x \approx 5cm$

أو $x + 1 \approx -6$

يهمل $x \approx -6 - 1 \Rightarrow x \approx -7cm$

الطول $x + 2 = 5 + 2 = 7\ cm$

## الدرس 5 حل المعادلات باستعمال القانون العام (الدستور)

خطوات الحل

يمكن حل المعادلة $a \neq 0$ , $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لحل المعادلة بالقانون العام وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية كما يأتي:

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة ( القياسية ) : $ax^2 + bx + c = 0$

2) نكتب قيم المعاملات : $a$ معامل $x^2$ ، $b$ معامل $x$ مع اشارته ، $c$ الحد المطلق مع اشارته .

3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير.

**السؤال 1** جد مجموعة حل المعادلات التالية باستعمال القانون العام:

**[1]** $x^2 - 3x - 5 = 0$

**الحل**

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

أما $x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$

أو $x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$

**[2]** $x^2 - 4x - 5 = 0$

**الحل**

$a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$x == \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 6}{2}$$

أما $x = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5$

أو $x = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} \Rightarrow x = -1$

$S = \{5, -1\}$

[3] $y^2 + 5y - 1 = 0$

الحل

$a = 1 \ , \ b = 5 \ , \ c = -1$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

أما $y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$

أو $y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} , \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$

[4] $3x^2 - 9x = -2$

الحل

$3x^2 - 9x + 2 = 0$

$a = 3 \ , \ b = -9 \ , \ c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

أما $x = \frac{9 + \sqrt{57}}{6}$

أو $x = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$

$$S = \left\{ \frac{9 + \sqrt{57}}{6} , \frac{9 - \sqrt{57}}{6} \right\}$$

[5] $4y^2 + 8y = 6$

الحل

$4y^2 + 8y - 6 = 0\} \div 2$

$2y^2 + 4y - 3 = 0$

$a = 2\ ,\ b = 4,\ c = -3$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4}$$

$$y = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

أما $y = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

أو $y = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$S = \left\{-1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$$

[6] $2y^2 - 3 = -5y$

الحل

$2y^2 + 5y - 3 = 0$

$a = 2\ ,\ b = 5,\ c = -3$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$y = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

أما $y = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

أو $y = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} \Rightarrow y = -3$

$$S = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$$

[7] $4x^2 - 12x + 9 = 0$

الحل

$a = 4 \ , \ b = -12 \ , \ c = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$x = \frac{12 \pm 0}{8}$$

$$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \implies S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

## المقدار المميز $[\Delta = b^2 - 4ac]$

يمكن معرفة نوع جذري المعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$ باستعمال المميز كالآتي :

1) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac > 0]$ موجب ومربع كامل يكون نوع الجذران حقيقيان نسبيان .

2) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac > 0]$ موجب وليس مربعا كاملا يكون نوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

3) اذا كان المميز يساوي صفر $[b^2 - 4ac = 0]$ يكون نوع الجذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ .

4) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac < 0]$ سالب يكون نوع الجذران غير حقيقيين (ليس لها حل في R)

السؤال 2 حدد جذري المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

[1] $2x^2 + 3x - 2 = 0$

الحل

$a = 2 \ , \ b = 3 \ , \ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2)$

$= 9 + 16 = 25$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

أما $x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

أو $x = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} \Rightarrow x = -2$

$S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

[2] $y^2 - 4y - 9 = 0$

الحل

$a = 1, \ b = -4 \ , \ c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9)$

$= 16 + 36 = 52$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{52}}{2(1)}$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2}$$

أما $y = \frac{4 + \sqrt{52}}{2}$

أو $y = \frac{4 - \sqrt{52}}{2}$

$S = \left\{\frac{4 + \sqrt{52}}{2} \ , \frac{4 - \sqrt{52}}{2}\right\}$

[3] $Z^2 + 8Z = -16$

الحل

$Z^2 + 8Z + 16 = 0$

$a = 1,\ b = 8\ ,\ c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16)$

$= 64 - 64 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران حقيقيان متساويان (لها جذر حقيقي واحد)

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-8}{2}$$

$Z = -4$

[4] $x^2 - 2x + 10 = 0$

الحل

$a = 1\ , b = -2\ , c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)10$

$= 4 - 40 = -36$

قيمة المقدار المميز سالب فإن المعادلة ليس لها حل في R

[5] $3x^2 - 7x + 6 = 0$

الحل

$a = 3\ ,\ b = -7\ ,\ c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4(3)(6)$

$= 49 - 72 = -23$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

**[6]** $2x^2 + 3x = 5$

الحل

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$a = 2\ ,\ b = 3\ ,\ c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-5)$

$= 9 + 40 = 49$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

أما $x = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow x = 1$

أو $x = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-10}{4} \Rightarrow x = \frac{-5}{2}$

$S = \left\{1\ , -\frac{5}{2}\right\}$

**[7]** $y^2 - 2y + 1 = 0$

الحل

$a = 1\ ,\ b = -2,\ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1)$

$= 4 - 4 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)}$$

$y = \frac{2}{2} \Rightarrow y = 1$

$S = \{1\}$

[8] $y^2 + 12 = -9y$

الحل

$y^2 + 9y + 12 = 0$

$a = 1\ ,\ b = 9\ ,\ c = 12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (9)^2 - 4(1)(12)$

$= 81 - 48 = 33$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2(1)}$$

$$y = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2}$$

أما $y = \frac{-9 + \sqrt{33}}{2}$

أما $y = \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}$

$$S = \left\{\frac{-9 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}\right\}$$

السؤال 3 حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

فكـــر

ii) $3y^2 - 6y - 42 = 0$

الحل

$3y^2 - 6y - 42 = 0 \} \div 3$

$y^2 - 2y - 14 = 0$

$a = 1 \ , \quad b = -2 \ , \quad c = -14$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-14)$

$= 4 + 56 = 60$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$y = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{60}}{2(1)}$

$y = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{15}}{2}$

$y = 1 \pm \sqrt{15}$

أما $y = 1 + \sqrt{15}$

أو $y = 1 - \sqrt{15}$

$S = \{1 + \sqrt{15} \, , 1 - \sqrt{15}\}$

i) $x^2 + 8x = 10$

الحل

$x^2 + 8x - 10 = 0$

$a = 1 \ , \ b = 8 \ , \ c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(-10)$

$= 64 + 40 = 104$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{104}}{2(1)}$

$x = \dfrac{-8 \pm 2\sqrt{26}}{2}$

$x = -4 \pm \sqrt{26}$

أما $x = -4 + \sqrt{26}$

أو $x = -4 - \sqrt{26}$

$S = \{-4 + \sqrt{26} \, , -4 - \sqrt{26}\}$

**ملاحظة**

اذا طلب بالسؤال ما قيمة الثابت k وقال أن جذري المعادلة متساويان نجعل المميز = صفر

$$b^2 - 4ac = 0$$

**السؤال 4**

ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة :

$x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ متساويين؟

**الحل**

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+1) \quad , \quad c = 4$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+1)]^2 - 4(1)(4) = 0$

$(k+1)^2 - 16 = 0$ فرق بين مربعين

$(k+1+4)(k+1-4) = 0$

$(k+5)(k-3) = 0$

أما $k+5=0 \Rightarrow k=-5$

أو $k-3=0 \Rightarrow k=3$

**السؤال 5**

ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة

$x^2 - (k+2)x + 36 = 0$ متساويين؟

**الحل**

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+2) \quad , \quad c = 36$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+2)]^2 - 4(1)(36) = 0$

$(k+2)^2 - 144 = 0$ فرق بين مربعين

$(k+2+12)(k+2-12) = 0$

$(k+14)(k-10) = 0$

أما $k+14=0 \Rightarrow k=-14$

أو $k-10=0 \Rightarrow k=10$

**السؤال 6**

ما قيمة الثابت $k$ التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 25 = (k-5)y$ متساويين؟

**الحل**

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$4y^2 - (k-5)y + 25 = 0$

$a = 4 \quad , \quad b = -(k-5) \quad , \quad c = 25$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k-5)]^2 - 4(4)(25) = 0$

$(k-5)^2 - 400 = 0$ فرق بين مربعين

$(k-5+20)(k-5-20) = 0$

$(k+15)(k-25) = 0$

أما $k+15=0 \implies k=-15$

أو $k-25=0 \implies k=25$

**السؤال 7**

ما قيمة الثابت $k$ التي تجعل جذري المعادلة $Z^2 + 16 = (k+4)Z$ متساويين؟

**الحل**

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$Z^2 - (k+4)Z + 16 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+4) \quad , \quad c = 16$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+4)]^2 - 4(1)(16) = 0$

$(k+4)^2 - 64 = 0$ فرق بين مربعين

$(k+4+8)(k+4-8) = 0$

$(k+12)(k-4) = 0$

أما $k+12=0 \implies k=-12$

أو $k-4=0 \implies k=4$

**ملاحظة**

اذا قال في السؤال بين أن المعادلة ليس لها حل في $R$ نستخدم قانون المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

**السؤال 8**

بين أن المعادلة $Z^2 - 6Z + 28 = 0$ ليس لها حل في $R$

**الحل**

$a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = 28$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(28)$

$= 36 - 112 = -76$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في $R$

السؤال 9

مسائل حياتية

العاب نارية : في احدى المناسبات اطلقت مجموعة من الألعاب النارية عموديا في الهواء وصلت الى ارتفاع $140m$ .
احسب الزمن الذي وصلت به الى هذا الارتفاع اذا كانت المعادلة التالية : $5t^2 + 60t = 140$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار الذي وصلت اليه الألعاب النارية بعد t ثانية .

الحل

الطريقة الأولى (الدستور)

$5t^2 + 60t - 140 = 0 \quad \} \div 5$

$t^2 + 12t - 28 = 0$

$a = 1 \ , b = 12 , \quad c = -28$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(28)}}{2(1)}$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{2}$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$t = \frac{-12 \pm 16}{2}$$

أما $t = \frac{-12 + 16}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow t = 2$

أو $t = \frac{-12 - 16}{2} = \frac{-28}{2} \Rightarrow t = -14$ يهمل

الطريقة الثانية (التجربة)

$5t^2 + 60t - 140 = 0 \quad \} \div 5$

$t^2 + 12t - 28 = 0$

$(t + 14)(t - 2) = 0$

أما $t + 14 = 0 \Rightarrow t = -14$ يهمل

أو $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$

# حل المعادلات الكسرية

نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بتخلص من الكسور. ثم حلها بإحدى طرق التحليل السابقة.

**السؤال 1** جد مجموعة الحل للمعادلات التالية:

$[1]\ 5x+\frac{x-2}{3x}=\frac{2}{3}\ \}\cdot 3x$

الحل

$3x(5x)+\cancel{3x}\left(\frac{x-2}{\cancel{3x}}\right)=\cancel{3x}\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)$

$15x^2+x-2=2x$

$15x^2+x-2-2x=0$

$15x^2-x-2=0$ التجربة

$(5x-2)(3x+1)=0$

أما $5x-2=0$

$5x=2\ \}\div 5 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$

أو $3x+1=0$

$3x=-1\ \}\div 3 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$

$S=\left\{\frac{2}{5},-\frac{1}{3}\right\}$

$[2]\ \frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{4x^2}\ \}\cdot 4x^2$

الحل

$\cancel{4x^2}^{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)+\cancel{4x^2}^{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)=\cancel{4x^2}\left(\frac{6}{\cancel{4x^2}}\right)$

$4x+2x^2=6$

$2x^2+4x-6=0\ \}\div 2$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ التجربة

أما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$S=\{-3,1\}$

[4] $\frac{x+4}{2} = \frac{-3}{2x}$ الطرفين في الوسطين

الحل

$2x(x+4) = -3(2)$

$2x^2 + 8x = -6$

$2x^2 + 8x + 6 = 0 \} \div 2$

$x^2 + 4x + 3 = 0$ التجربة

$(x+3)(x+1) = 0$

أما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$S = \{-3, 1\}$

[5] $\frac{9x-14}{x-5} = \frac{x^2}{x-5} \} \cdot (x-5)$

الحل

$9x - 14 = x^2$

$x^2 - 9x + 14 = 0$ التجربة

$(x-7)(x-2) = 0$

أما $x-7=0 \Rightarrow x=7$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$S = \{7, 2\}$

[3] $\frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y} \} \times 10y$

الحل

$\cancel{10y}^{5}\left(\frac{y}{\cancel{2}}\right) - \cancel{10y}^{2}\left(\frac{7}{5}\right) = \cancel{10y}\left(\frac{3}{\cancel{10y}}\right)$

$5y^2 - 14y = 3$

$5y^2 - 14y - 3 = 0$ التجربة

$(y-3)(5y+1) = 0$

أما $y+3=0 \Rightarrow y=-3$

أو $5y+1=0$

$5y = -1 \} \div 5 \Rightarrow x = \frac{-1}{5}$

$S = \left\{3, -\frac{1}{5}\right\}$

[7] $\frac{1}{y^2-6}=\frac{2}{y+3}$ الطرفين في الوسطين

الحل

$2y^2-12=y+3$

$2y^2-12-y-3=0$

$2y^2-y-15=0$ التجربة

$(2y+5)(y-3)=0$

أما $2y+5=0$

$2y=-5 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}$

أو $y-3=0 \Rightarrow y=3$

$S=\left\{-\frac{5}{2},3\right\}$

[6] $\frac{y+1}{2y^2}=\frac{3}{4}$ الطرفين في الوسطين

الحل

$2y^2(3)=4(y+1)$

$6y^2=4y+4$

$6y^2-4y-4=0 \} \div 2$

$3y^2-2y-2=0$ الدستور

$a=3 \ , \quad b=-2 \ , \ c=-2$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$y=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(3)(-2)}}{2(3)}$

$y=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{6}$

$y=\frac{2\pm\sqrt{28}}{6}$

$y=\frac{2\pm2\sqrt{7}}{6}$

$y=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

أما $y=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$

أو $y=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

$S=\left\{\frac{1+\sqrt{7}}{3} \ , \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right\}$

**[8]** $\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$

**الحل**

$\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{(x+3)(x-3)}\ \}\times(x+3)(x-3)$

$x(x+3)+4x(x-3)=18$

$x^2+3x+4x^2-12x-18=0$

$5x^2-9x-18=0$ التجربة

$(x-3)(5x+6)=0$

أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

أو $5x+6=0$

$5x=-6\ \}\div 5 \Rightarrow x=\frac{-6}{5}$

$S=\left\{3,-\frac{6}{5}\right\}$

**[9]** $\frac{2}{x+2}-\frac{x}{2-x}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$

**الحل**

$\frac{2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}\ \}\times(x+2)(x-2)$

$2(x-2)+x(x+2)=x^2+4$

$2x-4+x^2+2x-x^2-4=0$

$4x-8=0$

$4x=8\ \}\div 4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow S=\{2\}$

[10] $\frac{y-4}{y+2}-\frac{2}{y-2}=\frac{17}{y^2-4}$

الحل

$$\frac{y-4}{y+2}-\frac{2}{y-2}=\frac{17}{(y+2)(y-2)} \quad \}\times(y+2)(y-2)$$

$$(y-2)(y-4)-2(y+2)=17$$

$$y^2-4y-2y+8-2y-4-17=0$$

$$y^2-8y-13=0$$ الدستور

$$a=1\ ,b=-8\ ,\quad c=-13$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$y=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(-13)}}{2(1)}$$

$$y=\frac{8\pm\sqrt{64+52}}{2}$$

$$y=\frac{8\pm\sqrt{116}}{2}$$

$$y=\frac{8\pm2\sqrt{29}}{2}$$

$$y=4\pm\sqrt{29}$$

أما $y=4+\sqrt{29}$

أو $y=4-\sqrt{29}$

$$S=\{4+\sqrt{29}\ ,4\sqrt{29}\}$$

[11] $\frac{9}{x^2-x-6}-\frac{5}{x-3}=1$

الحل

$\frac{9}{(x-3)(x+2)}-\frac{5}{x-3}=1 \quad \} \times (x-3)(x+2)$

$9-5(x+2)=x^2+2x-3x-6$

$9-5x-10=x^2-x-6$

$-1-5x=x^2-x-6$

$x^2-x-6+1+5x=0$

$x^2+4x-5=0$ التجربة

$(x+5)(x-1)=0$

أما $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$S=\{-5,1\}$

---

[12] $\frac{12}{y^2-16}+\frac{6}{y+4}=2$

الحل

$\frac{12}{(y+4)(y-4)}+\frac{6}{y+4}=2 \quad \} \times (y+4)(y-4)$

$12+6(y-4)=2(y+4)(y-4)$

$12+6y-24=2(y^2-16)$

$6y-12=2y^2-32$

$2y^2-32-6y+12=0$

$2y^2-6y-20=0 \quad \} \div 2$

$y^2-3y-10=0$ التجربة

$(y-5)(y+2)=0$

أما $y+5=0 \Rightarrow y=-5$

أو $y-2=0 \Rightarrow y=2$

$S=\{-5,2\}$

[13] $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$

الحل

$\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{8+7x+3x^2}{(x+1)(x-1)}$ $\}\times(x+1)(x-1)$

$2x(x-1)+3x(x+1)=8+7x+3x^2$

$2x^2-2x+3x^2+3x-8-7x-3x^2=0$

$2x^2-6x-8=0$ $\}\div 2$

$x^2-3x-4=0$ التجربة

$(x-4)(x+1)=0$

أما $x-4=0 \Rightarrow x=4$

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$S=\{4,-1\}$

السؤال 2

مسائل حياتية

رياضة : اذا أراد راكب دراجة قطع مسافة 60km بين مدينتين A, B بسرعة معينة ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لتمكن من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول . جد سرعته أولا.

الحل

نفرض السرعة الأولى $= V$

نفرض السرعة الثانية $= V + 10$

الزمن = المسافة / السرعة

الزمن الأول $= \frac{60}{V}$ ، الزمن الثاني $= \frac{60}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $= 1$

$$\frac{60}{V} - \frac{60}{V+10} = 1 \quad \} \times V(V+10)$$

$$60(V+10) - 60V = V(V+10)$$

$$60V + 600 - 60V = V^2 + 10V$$

$$V^2 + 10V - 600 = 0$$ التجربة

$$(V+30)(V-20) = 0$$

أما $V + 30 = 0 \implies V = -30$ يهمل

أو $V - 20 = 0 \implies V = 20 \text{ km/h}$ السرعة

السؤال 3

فكـــر

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

$$\frac{3}{x+5}+\frac{4}{5-x}=\frac{x^2-15x+14}{x^2-25}$$

الحل

$$\frac{3}{x+5}-\frac{4}{x-5}=\frac{x^2-15x+14}{(x+5)(x-5)} \quad \} \times (x+5)(x-5)$$

$$3(x-5)-4(x+5)=x^2-15x+14$$

$$3x-15-4x-20=x^2-15x+14$$

$$-x-35=x^2-15x+14$$

$$x^2-15x+14+x+35=0$$

$$x^2-14x+49=0$$ مربع كامل

$$(x-7)^2=0$$ بأخذ الجذر التربيعي

$$x-7=0$$

$$x=7 \quad \Rightarrow \quad S=\{7\}$$